České vysoké učení technické v Praze

Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská

Katedra matematiky

Obor: Inženýrská informatika

Zaměření: Softwarové inženýrství

Iterativní lokální dynamické programování pro návrh duálního řízení

Iterative local dynamic programming for dual control

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Vypracoval: Michal Vahala

Vedoucí práce: Ing. Václav Šmídl, Ph.D.

Rok: 2010

zadání práce

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci vypracoval samostatně a použil jsem pouze podklady uvedené v přiloženém seznamu.

V Praze dne ....

Michal Vahala

Poděkování

Především bych chtěl poděkovat vedoucímu práce Ing. Václavu Šmídlovi, Ph.D. za odborné vedení, cenné rady a připomínky. Dále pak svým rodičům za poskytnuté zázemí a v neposlední řadě i své přítelkyni Bc. Pavle Procházkové za trpělivost a podporu.

Michal Vahala

Název práce:

Iterativní lokální dynamické programování pro návrh duálního řízení

Autor: Michal Vahala

Obor: Inženýrská informatika

Druh práce: Bakalářská práce

Vedoucí práce: Ing. Václav Šmídl, Ph.D.

Abstrakt: Tato práce se zabývá algoritmem *iterativního lokálního dynamického programování* jako jednou z metod pro řešení problému duálního řízení. Zmiňovaný algoritmus byl implementován pro jednoduchý systém, integrátor s neznámým ziskem. Dosažené výsledky byly porovnány s řízením získaným pomocí jiných metod, zejména použitím principu separace. Dále byl algoritmus testován i pro složitější systém, konkrétně jde o synchronní motor s permanentními magnety. Práce obsahuje obecnou teorii týkající se duálního řízení, popis užitých algoritmů a systémů pro testování a konkrétní přehled získaných výsledků. Závěrem jsou diskutovány vlastnosti a použitelnost algoritmu *iterativního lokálního dynamického programování.*

Klíčová slova: duální řízení, dynamické programování, iterativní lokální dynamické programování, integrátor s neznámým ziskem, synchronní motor s permanentními magnety

Title:

Iterative local dynamic programming for dual control

Author: Michal Vahala

Abstract: The thesis is concerned with the *iterative local dynamic programming* algorithm as one of methods used for solving a dual control problem. The algorithm has been implemented for a simple system – integrator with an unknown gain. Obtained results have been compared with a control designed by other methods, especially by using a separation principle. Next, the algorithm has been tested on more complicated system, namely permanent magnet synchronous machine. The thesis contains general dual control theory, used algorithms and systems descriptions and list of gained results. Lastly the features and usability of the *iterative local dynamic programming* algorithm are discussed.

Key words: dual control, dynamic programming, iterative local dynamic programming, integrator with unknown gain, permanent magnet synchronous machine

Obsah

Úvod **9**

1 Teorie duálního řízení **11**
1.1 Základní pojmy . . . 11
1.1.1 Systém a řízení . . . 11
1.2 Dynamické programování . . . 12
1.2.1 Formulace problému . . . 12
1.2.2 Přístup dynamického programování . . . 13
1.3 Vliv neznalosti na systém . . . 14
1.3.1 Úplná a neúplná stavová informace . . . 14
1.3.2 Kalmanův filtr . . . 17
1.4 Spojité systémy . . . 18
1.4.1 Deterministické systémy se spojitým časem . . . 18
1.5 Algoritmy pro duální řízení . . . 20

2 Algoritmy pro návrh řízení **22**
2.1 Výběr algoritmů pro srovnání . . . 22
2.1.1 Princip separace . . . 22
2.1.2 LQG . . . 22
2.1.3 Zobecněné iterativní LQG řízení . . . 23
2.2 Algoritmus iterativního lokálního dynamického programování . . . 24
2.2.1 Formulace problému . . . 25
2.2.2 Osnova algoritmu . . . 25
2.2.3 Detaily implementace . . . 26
2.2.4 Konkrétní použité aproximace . . . 27
2.2.5 Předběžný odhad vlatností algoritmu . . . 27

3 Systémy pro testování **29**
3.1 Jednoduchý systém . . . 29
3.1.1 Popis problému . . . 29
3.1.2 Úpravy rovnic . . . 29
3.1.3 Aplikace metody CE . . . 30
3.1.4 Algoritmus LQG . . . 31
3.1.5 iLQG . . . 33
3.1.6 iLDP . . . 34
3.2 Synchronní motor s permanentními magnety . . . 36
3.2.1 Popis systému . . . 36

3.2.2 Úprava rovnic . . . 37
3.2.3 Aplikace iLDP . . . 39
3.2.4 Algoritmus LQG . . . 40

4 Výsledky **43**
4.1 Metodika zpracování a získávání výsledků . . . 43
4.1.1 Funkce pro jednoduchý systém . . . 43
4.1.2 Testovací schémata jednoduchého systému . . . 44
4.2 Výsledky algoritmů pro jednoduchý systém . . . 44
4.2.1 Různá počáteční nastavení . . . 44
4.2.2 Výsledky porovnání algoritmů . . . 45
4.2.3 Chování jednotlivých algoritmů . . . 48
4.2.4 Průběh skutečné hodnoty . . . 50
4.3 Výsledky pro synchronní motor . . . 53
4.3.1 Specifikace parametrů a konstant . . . 53
4.3.2 Pozorované výsledky . . . 55
4.4 Diskuze . . . 56
4.4.1 Porovnání algoritmů . . . 57
4.4.2 Hodnocení algoritmu iLDP . . . 59
4.4.3 Konfrontace s prvotními očekáváními . . . 62

Závěr **65**

Literatura **66**

Seznam použitého označení

iLDP	iterativní lokální dynamické programování
LQG	lineárně kvadraticky gaussovské řízení (Linear-Quadratic-Gaussian)
iLQG	iterativní LQG

Úvod

Skutečný svět se nikdy nechová přesně podle matematických rovnic, protože ty jsou vždy jen jakýmsi zjednodušením nebo přiblížením. V reálném světě se vyskytuje mnoho neznámých veličin, poruch, nepředvídatelných vlivů a ani naše měřící přístroje nejsou přesné. Chceme-li efektivně řídit nějaký systém, musíme si být těchto vlivů vědomi a zahrnout je do našich uvažování. Situace se však ještě může zkomplikovat, když jeden nebo více parametrů neznáme. To může nastat z různých důvodů, například příslušné čidlo nebo měřící přístroj nemůžeme nebo nechceme (například z důvodu vysoké ceny) instalovat a tedy o velikosti příslušné hodnoty můžeme jen usuzovat ze známých dat. Ještě složitější situace nastane, když uvažujeme neznámý parametr proměnný.

Máme tedy dva cíle, musíme systém co nejlépe řídit a současně se snažit o co nejpřesnější určení neznámých parametrů. Tyto dva postupy jsou však obecně v rozporu, protože parametry se nejlépe určují, když je systém vybuzen a nechová se optimálně. Právě tento rozpor a nalezení kompromisu, který povede k jeho řešení, je podstatou duálního řízení.

Pro přiblížení ilustrujme problém na jednoduchém příkladě: Uvažujme elektromotor s možností řídit napětí na vstupu motoru a měřit příslušné proudy. Jedná se tedy o systém se dvěma vstupy a dvěma výstupy. Cílem našeho řízení je dosažení požadovaných otáček rotoru. Ovšem otáčky a ani polohu hřídele měřit nemůžeme. Máme o nich však znalost v podobě počátečních středních hodnot a variancí. Naší snahou je co nejpřesněji určit hodnotu otáček a polohy hřídele a současně systém řídit tak, abychom dosáhli požadované hodnoty otáček. Tyto dvě snahy jsou ale v rozporu, protože nejvíce informací o neznámých parametrech získáme, když je motor vybuzen. Tedy například se prudce rozjíždí, brzdí, rychle mění rychlost nebo kmitá, což se projevuje v proudech, které máme možnost měřit. Ale právě vybuzení motoru je v rozporu se snahou o dobré řízení, protože chyba, které se dopustíme, je většinou nepřijatelná. Naopak, když se systém snažíme řídit bez dostatečné znalosti jeho parametrů, s velkou pravděpodobností selžeme.

Námětem této bakalářské práce je algoritmus *iterativního lokálního dynamického programování* (*iLDP*) jako jedna z metod pro řešení problému duálního řízení. Algoritmus byl navržen a popsán v článku [7]. Jak už prozrazuje název algoritmu, jedná se o iterační metodu. Tedy stručně řečeno, algoritmus vyjde od nějakého počátečního řízení, které je ovšem nutno dodat jako apriorní informaci a v cyklech (iteracích) tuto řídící strategii vylepšuje za účelem získání řízení optimálního. Dále se jedná o metodu lokální, což můžeme jednoduše chápat tak, že kandidáti na „vylepšení“ řízení jsou vybíráni z jistého, zatím blíže nespecifikovaného okolí původní řídící strategie. Nakonec algoritmus využívá obecné schéma dynamického programování, které bude blíže popsáno v dalším textu.

Cílem této práce bylo seznámit se s obecnou tématikou duálního řízení a detailněji s konkrétním algoritmem - iterativním lokálním dynamickým programováním. Následně

tento algoritmus implementovat a aplikovat na jednoduchý systém. Otestovat jeho funkčnost a schopnost řídit, a to i v porovnání s jinými metodami a algoritmy. Dále se pokusit implementovat algoritmus *iLDP* pro složitější systém blíže praktické aplikaci, konkrétně se jedná o synchronní motor s permanentními magnety. Otestovat funkčnost a případně srovnat s dostupnými výsledky jiných řídících strategií. Na základě získaných výsledků posoudit výhody a nevýhody algoritmu a jeho použitelnost pro další úlohy.

Hlavním přínosem práce je otestování vlastností algoritmu *iLDP* na jiných problémech, než pro které byla vyvinuta autory. Objevení kladů a záporů algoritmu a dále díky srovnání s jinými algoritmy získání přehledu, pro které praktické aplikace je vhodnější, respektive méně vhodný než srovnávané metody. Prvotní očekávání pro srovnání algoritmu *iLDP* a řízení získaného pomocí principu separace jsou, že *iLDP* bude pomalejší co do výpočetního času, avšak přesnost získaných výsledků bude lepší. Dále je očekávána nezanedbatelná závislost výsledného řízení na volbě použitých aproximací.

1 Teorie duálního řízení

1.1 Základní pojmy

1.1.1 Systém a řízení

Systém

Základním pojmem, se kterým budeme v textu pracovat, je *systém*. Obdobně jako základní pojmy zejména v matematických vědách (bod, množina, algoritmus,...), nelze tento pojem exaktně definovat. Systém si můžeme představit jako jistý „objekt“, často bude reprezentovat objekt skutečného světa. Hlavní vlastností systému je, že má zpravidla jeden nebo více vstupů, pomocí kterých mu můžeme předávat informaci – řízení a jeden nebo více výstupů, což jsou hodnoty, které pozorujeme. Co se odehrává uvnitř systému však obecně nevíme. Řízení, které budeme dodávat systému na vstup, bude v textu značeno písmenem u. Analogicky bude písmenem y označena pozorovaná hodnota na výstupu.

Chování systému, to je jakým výstupem reaguje na vstup, popisujeme dle [3] obecně diferenciální rovnicí, respektive soustavou diferenciálních rovnic vyšších řádů. Jedná se o takzvaný vnější popis. Tento druh popisu pohlíží na systém „zvenku“ bez skutečné znalosti, co se odehrává uvnitř systému a jaká je jeho podstata. Vnější popis obvykle obdržíme při odvození modelu systému z fyzikálních rovnic. Omezení, která z něj plynou, se snažíme odstranit zavedením vnitřního (stavového) popisu, kdy soustavu diferenciálních rovnic vyššího řádu převedeme vhodnou volbou nových proměnných x na soustavu diferenciálních rovnic prvního řádu. Proměnné x označujeme jako stavové proměnné.

Řízení

Naším úkolem je pro zadaný systém nalézt regulátor, tedy obecně řízení u takové, které dodané na vstup způsobí, že systém se bude „chovat podle našich požadavků“. To zpravidla znamená, že hodnoty výstupní veličiny y dosáhnou nebo se přiblíží s danou přesností požadované hodnotě v podobě referenčního signálu, který regulátor dostává z vnějšku a současně dodrží předem stanovená omezení. Práce je ovšem zaměřena na řízení složitějších systémů, u kterých jeden nebo více parametrů neznáme přesně. Tedy některý (více) z koeficientů v rovnicích popisujících systém není znám. Máme však o něm jistou statistickou informaci v podobě jeho očekávané hodnoty a variance. Dále je-li systém nelineární, jsou výsledné rovnice příliš složité a tedy analyticky neřešitelné. Pro numerické řešení jsou rovnice systému zpravidla převáděny do diskrétního tvaru.

Řízení obecně dělíme podle [3] na dva typy: *Přímovazební řízení* užíváme v případě, kde je k dispozici přesný matematický model systému a je vyloučen výskyt neurčitostí.

Toto řízení nevyužívá žádné zpětné informace od systému a regulátor pracuje pouze s referenčním signálem. Naproti tomu *zpětnovazební řízení* využívá i informace o skutečném výstupu systému a snaží se tak eliminovat chyby v důsledku neurčitostí a chyb způsobených nepřesností modelu.

Duální řízení

Chceme navrhnout regulátor pro zadaný systém s neznámými parametry. Úkoly jsou tedy dva: 1. *opatrnost* - efektivně systém řídit a 2. *buzení* - určit neznámé parametry. Tyto dva přístupy jsou ale obecně v rozporu. Abychom mohli systém dobře řídit, potřebujeme znát parametry co nejpřesněji. Nejvíce informací o parametrech však získáme, když je systém vybuzen a nechová se optimálně. Tyto pojmy není snadné kvantifikovat, ale velmi často se projevují v konkrétních řídících schématech. Naším úkolem je pokusit se nalézt nějaký kompromis mezi oběma úkoly. Právě tento přístup je označován jako *duální řízení* [2].

1.2 Dynamické programování

1.2.1 Formulace problému

V textu budeme pracovat zpravidla s diskrétním systémem, ve smyslu systému s diskrétním časem, protože výpočty jsou prováděny ve většině případů problematiky duálního řízení numericky. Rovnice popisující systém jsou však zpravidla ve spojitém tvaru (model často vychází ze skutečnosti, popřípadě fyzikálních zákonů). V tomto případě provádíme diskretizaci.

Dále budeme v textu předpokládat konečný časový horizont a ztrátovou funkci aditivní v čase. Je samozřejmě možno uvažovat i složitější úlohy řízení systémů nevyhovujících těmto požadavků, těmi se však zabývat nebudeme.

Základní problém je formulován podle [2] následovně:

Uvažujme stavový popis diskrétního dynamického systému

$$x_{k+1} = f_k(x_k, u_k, w_k), \quad k = 0, \ldots, N-1 \ , \tag{1.1}$$

kde x_k je stavová proměnná, u_k řízení a w_k náhodná porucha, vše v čase k při celkovém časovém horizontu N. Na řízení u_k klademe omezení, že může nabývat pouze hodnot z neprázdné množiny $U_k(x_k)$ závislé na stavu x_k. Náhodná porucha w_k je charakterizována rozdělením pravděpodobnosti P_k, které může explicitně záviset na x_k a u_k, ne však na předchozích poruchách $w_{k-1}, \ldots, w_0$.

Dále uvažujme množinu řízení, jedná se o posloupnost funkcí

$$\pi = \{\mu_0, \ldots, \mu_{N-1}\},$$

kde μ_k přiřazuje stavu x_k přípustné řízení $u_k = \mu_k(x_k)$, to je takové, že $\mu_k(x_k) \in U_k(x_k)$, množinu přípustných řešení označme Π. Máme-li dány počáteční stav x_0 a přípustné

řešení π, můžeme stavy x_k a poruchy w_k považovat za náhodné veličiny s rozdělemím definovaným systémem rovnic 1.1, kde za řízení u_k dosadíme hodnotu funkce μ_k v x_k.

Pro dané ztráty v jednotlivých časech – funkce g_k, pak definujeme očekávanou ztrátu π v x_0 jako

$$J_\pi(x_0) = \mathbf{E}\left\{ g_N(x_N) + \sum_{k=0}^{N-1} g_k\left(x_k, \mu_k(x_k), w_k\right) \right\}$$

kde je očekávaná hodnota počítána přes náhodné veličiny w_k a x_k. Optimální řízení π^*je právě to, které minimalizuje ztrátu

$$J_{\pi^*}(x_0) = \min_{\pi \in \Pi} J_\pi(x_0).$$

Optimální ztrátu označme $J^*(x_0)$.

1.2.2 Přístup dynamického programování

Dynamické programování dle [9] je jedním ze způsobů návrhu algoritmů pro řešení jistých typu optimalizačních problémů. Konkrétně se uplatňuje v případě, že se jedná o diskrétní optimalizační úlohu. Na řešení daného problému můžeme nahlížet jako na konečnou posloupnost rozhodnutí a platí *princip optimality*.

Princip optimality

Nechť $\pi^* = \left\{\mu_0^*, \mu_1^*, \ldots, \mu_{N-1}^*\right\}$ je optimální řídící strategie pro základní problém a předpokládejme, že když aplikujeme řízení π^*, daný stav x_i se vyskytne v čase i s pozitivní pravděpodobností. Uvažujme podproblém, kdy ve stavu x_i a čase i chceme minimalizovat *náklady na pokračování* (v anglické literatuře označováno jako „cost-to-go“) od času i do N

$$\mathbf{E}\left\{ g_N(x_N) + \sum_{k=i}^{N-1} g_k(x_k, \mu_k(x_k), w_k) \right\}$$

Potom úsek strategie $\left\{\mu_i^*, \mu_{i+1}^*, \ldots, \mu_{N-1}^*\right\}$ je optimální pro tento podproblém.

Intuitivně je princip optimality velmi jednoduchý. Jestliže úsek strategie $\left\{\mu_i^*, \mu_{i+1}^*, \ldots, \mu_{N-1}^*\right\}$ nebude optimální, budeme schopni dále zredukovat cenu přechodem k optimální strategii pro podproblém.

Princip optimality umožňuje optimální strategii konstruovat postupně. Nejdříve nalezneme optimální strategii pro koncový podproblém zahrnující poslední krok. Poté rozšiřujeme podproblém od konce přidáním předposledního kroku a tak dále. Takto může být vytvořena optimální strategie pro celý problém.

Algoritmus dynamického programování je tedy založen na následující myšlence: Algoritmus pracuje iterativně a řeší koncové podproblémy pro daný časový úsek, při tom využívá řešení předchozích koncových podproblémů pro kratší časové úseky. Převzato z [2].

Formulace algoritmu dynamického programování

Podle [2], pro každý počáteční stav x_0 je optimální cena $J^*(x_0)$ základního problému rovna $J_0(x_0)$, získané z posledního kroku následujícího algoritmu, který prochází zpět časy od $N-1$ do 0:

$$J_N(x_N) = g_N(x_N)$$

$$J_k(x_k) = \min_{u_k \in U_k(x_k) w_k} \mathbf{E}\left\{g_k(x_k, u_k, w_k) + J_{k+1}(f_k(x_k, u_k, w_k))\right\} \tag{1.2}$$

$$k = 0, 1, \ldots, N-1$$

kde je očekávaná hodnota počítána podle náhodné veličiny w_k, která obecně závisí na x_k a u_k. Dále, když $u_k^* = \mu_k^*(x_k)$ minimalizuje pravou stranu rovnice (1.2) pro každé x_k a k, stretegie $\pi* = \left\{\mu_1^*, \ldots, \mu_{N-1}^*\right\}$ je optimální.

Hodnotu $J_k(x_k)$ je možno interpretovat jako optimální cenu pro $(N-k)$-tý krok problému začínajícího ve stavu x_k a čase k a končícího v čase N. Následně označujeme $J_k(x_k)$ náklady na pokračování („cost-to-go“) ve stavu x_k a čase k, a J_k označujeme jako funkci nákladů na pokračování („cost-to-go function“) v čase k.

Ideálně bychom chtěli využít algoritmus dynamického programování k získání J_k vyjádřené v uzavřeném tvaru nebo k získání optimální strategie. Existuje mnoho případů, kdy je daná úloha řešitelná analyticky, obzvláště za zjednodušujících předpokladů. To je velmi užitečné zejména pro lepší náhled do problematiky a jako vodítko pro složitější modely. Avšak ve většině případů není analytické řešení možné, pak je třeba použít numerické řešení pomocí algoritmu dynamického programování. Tento přístup může být časově velmi náročný, zejména minimalizaci v rovnici (1.2) je třeba provést pro každou hodnotu x_k. Stavový prostor musí být diskretizován, nejedná-li se o konečnou množinu, a výpočetní nároky pak narůstají proporcionálně k počtu možných hodnot x_k. Nicméně dynamické programování je pouze obecný přístup pro iterativní optimalizaci při uvažování nejistoty v systému.

1.3 Vliv neznalosti na systém

1.3.1 Úplná a neúplná stavová informace

V optimálním případě by bylo možno měřit všechny stavové veličiny systému a na jejich základě libovolným způsobem upravovat jeho dynamické vlastnosti. Ve skutečnosti ale zpravidla není možné všechny stavy změřit a musíme se rozhodovat pouze na základě informací, které máme k dispozici, pak mluvíme o *neúplné informaci o stavu systému* [5, 2]. Může to být způsobeno například nedostupností hodnot některých stavů, použité měřící přístroje mohou být nepřesné nebo náklady na získání přesné hodnoty stavu mohou být příliš omezující. Případy tohoto typu modelujeme zpravidla tak, že v každém kroku regulátor obdrží jisté pozorování skutečné hodnoty stavu, které ovšem může být ovlivněno a narušeno stochastickou nejistotou. Teoreticky se však problém s neúplnou informací o stavu neodlišuje od úloh s úplnou stavovou informací, protože existují způsoby,

jak převést (redukovat) systém s neúplnou informací na systém s úplnou. Tyto postupy obecně vedou na algoritmy využívající dynamické programování, ale jsou výpočetně mnohem náročnější, než v případě úplné informace. Dva možné postupy redukce převzaté z [2] budou následovat po formulaci problému:

Formulace problému s neúplnou informací o stavu

Nejdříve formulujme základní problém s neúplnou stavovou informací, který následně redukujeme na systém s informací úplnou. Uvažujme rozšíření základního problému 1.1, kde ale regulátor, namísto přístupu ke stavu systému, získává pouze pozorování z_k ve tvaru

$$z_0 = h_0(x_0, v_0), \quad z_k = h_k(x_k, u_{k-1}, v_k), \quad k = 1, 2, \ldots, N-1, \tag{1.3}$$

kde v_k reprezentuje náhodnou poruchu pozorování charakterizovanou rozdělením pravděpodobnosti P_{v_k}, která závisí na současném stavu a všech předchozích stavech, řízeních a poruchách. Dále také počáteční stav x_0 považujeme za náhodnou veličinu s rozdělením P_{x_0}.

Soubor informací dostupných regulátoru v čase k označme I_k informačním vektorem. Tedy

$$\begin{aligned} I_k &= (z_0, \ldots, z_k, u_0, \ldots, u_{k-1}), \quad k = 1, \ldots, N-1, \\ I_0 &= z_0. \end{aligned}$$

Uvažujme množinu přípustných řízení jako posloupnost funkcí $\pi = \{\mu_0, \ldots, \mu_{N-1}\}$, kde každá funkce μ_k přiřazuje informačnímu vektoru I_k řízení $\mu_k(I_k) \in U_k$, pro všechna I_k, kde $k = 0, \ldots, N-1$. Chceme najít přípustnou řídící strategii, to jest posloupnost π, která minimalizuje očekávanou ztrátu

$$J_\pi = \mathbf{E}\left\{ g_N(x_N) + \sum_{k=0}^{N-1} g_k\left(x_k, \mu_k(I_k), w_k\right) \right\},$$

kde je očekávaná hodnota počítána přes náhodné veličiny x_0 a w_k, v_k pro $k = 0, \ldots, N-1$. Veličiny x_k a z_k se vypočítají z rovnic 1.1 respektive 1.3, přičemž v nich položíme $u_k = \mu_k(I_k)$.

Redukce na systém s úplnou stavovou informací

Tento postup je založen na myšlence definovat nový systém, jehož stav v čase k je množina všech hodnot, kterých může využít regulátor při tvorbě řízení. Jako stav nového systému tedy volíme informační vektor I_k a získáme systém

$$I_{k+1} = (I_{k,} z_{k+1}, u_k), \quad I_0 = z_0, \quad k = 0, \ldots, N-2. \tag{1.4}$$

Na tento systém povahy základního problému s úplnou informací můžeme pohlížet tak, že I_k je stav. Řízení u_k a pozorování z_k lze pak chápat jako náhodné poruchy. Dále rozdělení

pravděpodobnosti z_{k+1} závisí explicitně pouze na stavu I_k a řízení u_k. Ztrátovou funkci vyjádřenou pro nový systém je možno zapsat jako

$$\mathbf{E}\left\{g_k\left(x_k, u_k, w_k\right)\right\} = \mathbf{E}\left\{\mathbf{E}_{x_k,w_k}\left\{g_k\left(x_k, u_k, w_k\right) \mid I_k, u_k\right\}\right\}.$$

Tedy ztráta během jednoho kroku vyjádřená jako funkce nového stavu I_k a řízení u_k je

$$\tilde{g}_k(I_k,u_k) = \mathbf{E}_{x_k,w_k}\left\{g_k\left(x_k, u_k, w_k\right) \mid I_k, u_k\right\}. \tag{1.5}$$

Původní základní problém s neúplnou stavovou informací byl tedy převeden na úlohu s úplnou stavovou informací s rovnicí popisující systém 1.4 a ztrátou během jednoho kroku 1.5. Nyní je pro něj možno napsat algoritmus dynamického programování.

Postačující statistika

Při užití algoritmu dynamického programování za neúplné stavové informace je hlavní problém v jeho vyhodnocování ve stavovém prostoru, jehož dimenze neustále roste. S každým dalším měřením dimenze stavu a tedy informační vektor I_k narůstá, proto se snažíme redukovat množství dat skutečně potřebných pro účely řízení. Hledáme tedy popis známý jako *postačující statistika*, který bude mít menší dimenzi než I_k, ale současně zahrne veškerý důležitý obsah I_k potřebný pro řízení. Jako postačující statistiku označme funkci S_k informačního vektoru I_k, tedy $S_k(I_k)$ takovou, že minimalizuje ztrátu v algoritmu dynamického programování přes všechna přípustná řízení. Což můžeme zapsat pro vhodnou funkci H_k jako

$$J_k(I_k) \quad = \quad \min_{u_k \in U_k} H_k(S_k(I_k), u_k).$$

Po funkci S_k samozřejmě chceme, aby byla charakterizována menší množinou čísel, než informační vektor I_k, abychom získali výhody z jejího použití. Obecně existuje mnoho funkcí, které mohou sloužit jako postačující statistika. Triviálním příkladem může být identita $S_k(I_k) = I_k$.

Závisí-li rozdělení pravděpodobnosti poruchy pozorování v_k explicitně pouze na bezprostředně předcházejícím stavu, řízení a poruše systému, tedy na x_k, u_k, w_k, a nezávisí na předchozích hodnotách $x_{k-1}, \ldots, x_0, u_{k-1}, \ldots, u_0, w_{k-1}, \ldots, w_0, v_{k-1}, \ldots, v_0$, můžeme za postačující statistiku volit podmíněné rozdělení pravděpodobnosti $P_{x_k|I_k}$, o kterém lze ukázat (viz [2]), že

$$J_k(I_k) = \min_{u_k \in U_k} H_k(P_{x_k|I_k}, u_k) = \overline{J}_k(P_{x_k|I_k}),$$

kde H_k a $\overline{J}_k$ jsou vhodné funkce. Optimální řízení pak získáme ve tvaru funkcí podmíněného rozdělení pravděpodobnosti $\mu_k(I_k) = \overline{\mu}_k(P_{x_k|I_k})$ pro $k = 0, \ldots, N-1$. Tato reprezentace může být velmi užitečná, protože nám umožňuje rozložit optimální řízení na dvě nezávislé časti:

1. *pozorovatel* (estimátor), který v čase k použije měření z_k a řízení u_{k-1} k vygenerování rozdělení pravděpodobnosti $P_{x_k|I_k}$

2. *regulátor* (akurátor), který generuje vstupy (řízení) pro systém jako funkci rozdělení pravděpodobnosti $P_{x_k|I_k}$

Tento rozklad pak umožňuje navrhovat každou z částí samostatně podle charakteru konkrétní úlohy.

1.3.2 Kalmanův filtr

Chceme řešit následující problém, viz [5]: Máme lineární systém s neúplnou stavovou informací a snažíme se odhadnout (rekonstruovat, estimovat) stav systému z měřitelných vstupních a výstupních veličin. Dále předpokládejme, že měření výstupu a popřípadě i vstupu je zatíženo chybou měření. Tyto nepřesnosti měření můžeme modelovat jako aditivní šum. Odhadování (rekonstrukci, estimaci) potom navrhujeme pomocí stochastických metod. Řešení vede na takzvaný *Kalmanův filtr*.

Následující formulace problému a popis algoritmu Kalmanova filtru je převzat z [2], kde lze také nalézt odvození příslušných rovnic: Máme dva náhodné vektory x a y, které jsou svázány sdruženým rozdělením pravděpodobnosti tak, že hodnota jednoho poskytuje informaci o hodnotě druhého. Známe hodnotu y a chceme určit (odhadnout) hodnotu x tak, aby střední kvadratická odchylka mezi x a jeho odhadem byla minimální.

Takový odhad můžeme zístat v nejjednodušším případě metodou nejmenších čtverců, ale pro tento způsob je třeba velkého počtu měření. Jako lepší způsob se ale jeví využít sekvenční struktury problému a iterativně použít Kalmanův filtr, kdy odhad v čase $k+1$ získáme na základě jednoduchých rovnic pouze z předchozího odhadu a nového měření v čase k, žádná předchozí měření nejsou explicitně zahrnuta.

V dalším textu označme $\hat{x}_{k|k-1}$ apriorní odhad stavu, tedy odhad stavu v čase k na základě informací až do času $k-1$. Analogicky $\Sigma_{k|k-1}$ označuje apriorní kovarianční matici. Aposteriorní odhad stavu označme $\hat{x}_{k|k}$, to jest odhad v čase k na základě informací až do času k. Aposteriorní kovarianční matice je pak označena $\Sigma_{k|k}$.

Systém

Uvažujme lineární dynamický systém bez řízení ($u_k \equiv 0$) ve tvaru

$$x_{k+1} = A_k x_k + w_k,\ k = 0, 1, \ldots, N-1,$$

kde x_k je vektor stavu, w_k je vektor náhodné poruchy a matice A_k považujeme za známé. Dále rovnice měření je

$$z_k = C_k x_k + v_k,\ k = 0, 1, \ldots, N-1,$$

kde z_k je vektor pozorování (měřených veličin) a v_k vektor šumu. Nechť $x_0, w_0, \ldots, w_{N-1}, v_0, \ldots, v_{N-1}$ jsou vektory nezávislých náhodných veličin s daným rozdělením pravděpodobnosti, takovým, že

$$\mathrm{E}\{w_k\} = \mathrm{E}\{v_k\} = 0,\ k = 0, 1, \ldots, N-1.$$

Označme

$$S = \mathrm{E}\left\{(x_0 - \mathrm{E}\{x_0\})(x_0 - \mathrm{E}\{x_0\})^T\right\},\ M_k = \mathrm{E}\{w_k w_k^T\},\ N_k = \mathrm{E}\{v_k v_k^T\},$$

a nechť matice N_k je pozitivně definitní pro všechny časy k.

Algoritmus Kalmanova filtru

Předpokládejme, že máme spočítaný odhad $\hat{x}_{k|k-1}$ společně s kovarianční maticí $\Sigma_{k|k-1} = \mathrm{E}\left\{\left(x_k - \hat{x}_{k|k-1}\right)\left(x_k - \hat{x}_{k|k-1}\right)^T\right\}$. V čase k získáme další měření $z_k = C_k x_k + v_k$. Nyní můžeme získat aposteriorní odhad stavu $\hat{x}_{k|k}$ v čase k jako

$$\hat{x}_{k|k} = \hat{x}_{k|k-1} + \Sigma_{k|k-1} C_k^T \left(C_k \Sigma_{k|k-1} C_k^T + N_k\right)^{-1} \left(z_k - C_k \hat{x}_{k|k-1}\right), \tag{1.6}$$

dále pak apriorní odhad stavu $\hat{x}_{k+1|k}$ v čase $k+1$, tedy $\hat{x}_{k+1|k} = A_k \hat{x}_{k|k}$. Apriorní kovarianční matici v čase $k+1$ vypočítáme z

$$\Sigma_{k+1|k} = A_k \Sigma_{k|k} A_k^T + M_k,$$

kde aposteriorní kovarianční matici $\Sigma_{k|k} = \mathrm{E}\left\{\left(x_k - \hat{x}_{k|k}\right)\left(x_k - \hat{x}_{k|k}\right)^T\right\}$ můžeme získat z rovnice

$$\Sigma_{k|k} = \Sigma_{k|k-1} - \Sigma_{k|k-1} C_k^T \left(C_k \Sigma_{k|k-1} C_k^T + N_k\right)^{-1} C_k \Sigma_{k|k-1}.$$

Přidáním počátečních podmínek $\hat{x}_{0|-1} = \mathrm{E}\{x_0\}$ a $\Sigma_{0|-1} = S$ získáme *algoritmus Kalmanova filtru*, který ve své podstatě rekurzivně generuje posloupnost lineárních odhadů založených na metodě nejmenších čtverců.

Dále je možno vyjádřit rovnici 1.6 ve tvaru

$$\hat{x}_{k|k} = A_{k-1} \hat{x}_{k-1|k-1} + \Sigma_{k|k} C_k^T N_k^{-1} \left(z_k - C_k A_{k-1} \hat{x}_{k-1|k-1}\right),$$

který při uvažování systému se vstupem

$$x_{k+1} = A_k x_k + B_k u_k + w_k,\ k = 0, 1, \ldots, N-1,$$

umožňuje vypočítat rekurzivně aposteriorní odhady stavů $\hat{x}_{k|k}$ v časech k z rovnice

$$\hat{x}_{k|k} = A_{k-1} \hat{x}_{k-1|k-1} + B_{k-1} u_{k-1} + \Sigma_{k|k} C_k^T N_k^{-1} \left(z_k - C_k A_{k-1} \hat{x}_{k-1|k-1}\right),$$

přičemž rovnice pro výpočet aposteriorní kovarianční matice $\Sigma_{k|k}$ zůstávají nezměněny.

1.4 Spojité systémy

1.4.1 Deterministické systémy se spojitým časem

I když zpravidla pracujeme s diskrétními systémy, zejména z důvodů výpočtů na počítači, teorie optimálního řízení spojitých systémů může být velmi užitečná. Poskytuje totiž důležité principy, které jsou velmi často používány při návrhu algoritmů pro duální řízení. Konkrétně se jedná o Hamilton-Jacobi-Bellmanovu rovnost a Pontryaginův princip minima.

Spojitý systém

Dynamický systém se spojitým časem uvažujeme dle [2] ve tvaru

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t)),\ 0 \leq t \leq T, \\ x(0) &= x_0, \end{aligned} \tag{1.7}$$

kde $x(t)$ je stavový vektor v čase t, $\dot{x}(t)$ je vektor prvních derivací podle času v čase t, $u(t) \in U$ je řídící vektor v čase t, U je množina omezení řízení a T je časový horizont. O funkci f předpokládáme, že je spojitě diferencovatelná vzhledem k x a spojitá vzhledem k u. Rovnice 1.7 představuje soustavu n diferenciálních rovnic prvního řádu. Naším cílem je nalezení přípustné řídící trajektorie $\{u(t) \mid t \in [0,T]\}$ a odpovídající stavové trajektorie $\{x(t) \mid t \in [0,T]\}$ takové, že minimalizují ztrátovou funkci ve tvaru

$$h(x(T)) + \int_0^T g\left(x(t), u(t)\right) dt,$$

o funkcích g a h předpokládáme, že jsou spojitě diferencovatelné vzhledem k x a g je spojitá vzhledem k u.

Hamilton-Jacobi-Bellmanova rovnost

Hamilton-Jacobi-Bellmanova rovnost je parciální diferenciální rovnicí, která je splněna optimální funkcí nákladů na pokračování $J^*(t,x)$. Tato rovnice je analogií algoritmu dynamického programování ve spojitém čase. Rovnici lze psát podle [2] ve tvaru

$$\begin{aligned} 0 &= \min_{u \in U} \left[g(x,u) + \nabla_t J^*(t,x) + \nabla_x J^*(t,x)^T f(x,u) \right], \quad \forall t, x, \\ J^*(T,x) &= h(x). \end{aligned} \tag{1.8}$$

Jedná se tedy o parciální diferenciální rovnici s okrajovou podmínkou. O funkci $J^*(t,x)$ jsme předpokládali diferencovatelnost, apriorně ale její diferencovatelnost neznáme a tedy nevíme, jestli $J^*(t,x)$ řeší rovnici 1.8. Můžeme však použít následující tvrzení, jehož formulaci i důkaz lze nalézt v [2]:

Věta o dostatečnosti:

Nechť je funkce $V(t,x)$ spojitě diferencovatelná vzhledem k t a x a nechť je řešením Hamilton-Jacobi-Bellmanovy rovnosti:

$$\begin{aligned} 0 &= \min_{u \in U} \left[g(x,u) + \nabla_t V(t,x) + \nabla_x V(t,x)^T f(x,u) \right], \quad \forall t, x, \\ V(T,x) &= h(x), \quad \forall x. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Předpokládejme dále, že $\mu^*(t,x)$ dosáhne minima v rovnosti 1.9 pro všechna t a x. Nechť $\{x^*(t) \mid t \in [0,T]\}$ označuje stavovou trajektorii získanou při dané počáteční podmínce $x^*(0) = x_0$ a řídící trajektorii $u^*(t) = \mu^*(t, x^*(t)),\ t \in [0,T]$. Pak V je rovno optimální funkci nákladů na pokračování, tedy

$$V(t,x) = J^*(t,x), \quad \forall t, x.$$

Navíc řídící trajektorie $\{u^*(t) \mid t \in [0,T]\}$ je optimální.

Pontryaginův princip minima

Pontryaginův princip minima je důležitým teorémem optimálního řízení. Poskytuje nutnou (ne však postačující) podmínku pro optimální trajektorii, je úzce spřízněn s Hamilton-Jacobi-Bellmanovou rovností a lze ho z ní podle [2] také odvodit. Princip minima je výhodné formulovat pomocí Hamiltoniánu. Označme p gradient optimální funkce nákladů na pokračování pro optimální stavovou trajektorii $p(t) = \nabla_x J^* (t, x^*(t))$ a definujme Hamiltonián jako funkci zobrazující trojice vektorů (x, u, p) do reálných čísel

$$H(x, u, p) = g(x, u) + p^T f(x, u).$$

Rovnice pro systém pak může být zapsána v kompaktním tvaru

$$\dot{x}^*(t) = \nabla_p H \left(x^*(t), u^*(t), p(t)\right).$$

Obdobně může být zapsána pro p takzvaná *adjungovaná rovnice*

$$\dot{p}(t) = -\nabla_x H \left(x^*(t), u^*(t), p(t)\right).$$

Pontryaginův princip minima je podle [2] formulován následovně:

Princip minima:

Nechť $\{u^*(t) \mid t \in [0, T]\}$ je optimální řídící trajektorie a nechť $\{x^*(t) \mid t \in [0, T]\}$ je odpovídající stavová trajektorie, to jest

$$\dot{x}^*(t) = f \left(x^*(t), u^*(t)\right), \quad x^*(0) = x_0.$$

Nechť dále $p(t)$ je řešením adjungované rovnice

$$\dot{p}(t) = -\nabla_x H \left(x^*(t), u^*(t), p(t)\right),$$

s okrajovou podmínkou $p(T) = \nabla h \left(x^*(T)\right)$. Pak pro všechna $t \in [0, T]$

$$u^*(t) = \arg\min_{u \in U} H \left(x^*(t), u, p(t)\right).$$

Navíc existuje konstanta C taková, že

$$H \left(x^*(t), u^*(t), p(t)\right) = C, \quad \forall t \in [0, T].$$

1.5 Algoritmy pro duální řízení

Metody pro nalezení optimálního řízení lze obecně rozdělit do dvou základních kategorií na *globální* a *lokální* viz [8, 7].

Globální metody, používané zejména v posilovaném učení („Reinforcement Learning“), jsou založeny na na Bellmanově principu optimality, Hamilton-Jacobi-Bellmanově rovnosti a dynamickém programování. Tyto algoritmy hledají globálně optimální zpětnovazební řízení pro všechny stavy obecného stochastického systému a proto podléhají nebezpečí

„problému dimenzionality“ nebo také rozměrnosti (z anglického “curse of dimensionality” doslovně - *kletba rozměrnosti*). Jednoduše můžeme tento problém chápat tak, že při numerickém řešení úlohy jsou počítačem procházeny všechny body diskretizovaného stavového a řídícího prostoru, jejichž počet s rostoucím počtem dimenzí extrémně (exponenciálně) rychle roste. Výpočet pro mnohadimenzionální úlohy se pak stává co do paměťových nároků, ale hlavně z hlediska výpočetního času prakticky nerealizovatelným.

Lokální metody, častěji studované v teorii řízení, souvisí s Pontryaginovým principem maxima. Jejich podstatou je nalezení řízení, které je pouze lokálně optimální v okolí nějaké „extremální“ trajektorie. Většinou je užito deterministických prostředků jako řešení soustavy obyčejných diferenciálních rovnic (například střelbou nebo relaxací). Tento přístup ale vede na přímovazební řízení a nelze užít pro stochastické úlohy, vyhýbá se ale problému dimenzionality, což umožňuje řešit i komplexnější problémy.

V poslední době je snaha vyvíjet nové algoritmy, které kombinují výhody obou výše zmíněných přístupů. Příkladem může být *iterativní LQG* (*iLQG*). Tento algoritmus je založen na linearizaci nelineární úlohy v každém bodě reprezentativní trajektorie a následném řešení modifikované Riccatiho rovnice. Výhodou *iLQG* je, že jejím výsledkem je zpětnovazební řízení. Metoda je ale stále deterministická a nedokáže se vypořádat s nekvadratickými ztrátovými funkcemi a požadavky na omezené řízení.

S výše zmíněnými problémy se snaží vypořádat modifikovaná *iLQG*, která bude použita pro srovnání s ústřední metodou této práce *iLDP*. Dále pak do kategorie smíšených metod spadá právě i metoda *iLDP*, která bude podrobně popsána v následující kapitole.

2 Algoritmy pro návrh řízení

2.1 Výběr algoritmů pro srovnání

2.1.1 Princip separace

Princip separace nebo také *separační teorém pro lineární systémy s kvadratickou ztrátovou funkcí* zaujímá důležité místo v moderní teorii řízení. Intuitivně je velmi jednoduchý. Podle [2] je formulován následovně:

Optimální řízení pro lineární systém může být rozděleno do dvou částí:

1. *pozorovatel* (estimátor), který využívá měřená data k odhadu stavu systému,
2. *regulátor* (akurátor), který generuje ze stavu, respektive jeho odhadu, řízení pro systém.

Navíc část optimálního řízení označená jako *pozorovatel* je optimálním řešením problému určování (estimace) stavu nezávisle na uvažování řízení a část označená jako *regulátor* je optimální řešení řídícího problému za předpokladu úplné stavové informace. Každá část tedy může být navrhována nezávisle na sobě jako optimální řešení příslušných problémů estimace a regulace.

2.1.2 LQG

Řízení *LQG* (z anglického „Linear-Quadratic-Gaussian“) je primárně navrženo pro řízení lineárních systémů s kvadratickou ztrátovou funkcí a Gaussovským šumem. Existují však různé modifikace i pro nelineární systémy. Algoritmus *LQG* je založen právě na *principu separace*, kdy pozorovatel a regulátor jsou navrhovány zvlášť. Optimálním pozorovatelem je zde Kalmanův filtr a lze jej užít například ve tvaru, jak byl uveden v části 1.3.2. Optimálním regulátorem pak řízení označované jako LQ regulátor, které může být formulováno podle [2] následovně:

LQ regulátor pro lineární systém

$$x_{k+1} = A_k x_k + B_k u_k + w_k, \quad k = 0, 1, \ldots, N-1,$$

s kvadratickou ztrátovou funkcí

$$\mathbf{E}\left\{ x_N^T Q_N x_N + \sum_{k=0}^{N-1} \left(x_k^T Q_k x_k + u_k^T R_k u_k \right) \right\},$$

při uvažování neúplné stavové informace je optimálním řízením v každém čase rovno

$$\mu_k^*(I_k) = L_k \mathrm{E}\left\{x_k \mid I_k\right\},$$

kde matice L_k je dána rovností

$$L_k = -\left(R_k + B_k^T K_{k+1} B_k\right)^{-1} B_k^T K_{k+1} A_k,$$

přičemž matice K_k získáme rekurzivně z Riccatiho rovnice

$$\begin{aligned} K_N &= Q_N, \\ K_k &= A_k^T \left(K_{k+1} - K_{k+1} B_k \left(R_k + B_k^T K_{k+1} B_k\right)^{-1} B_k^T K_{k+1}\right) A_k + Q_k. \end{aligned}$$

2.1.3 Zobecněné iterativní LQG řízení

V článku [8] je popsán algoritmus *zobecněného iterativního LQG* řízení (*iLQG*) pro účely nalezení lokálního zpětnovazebního řízení nelineárních stochastických systémů s kvadratickou ztrátou, ale navíc lze požadovat i omezené vstupy. Obecně zahrnutí požadavku na omezené vstupy do ztrátové funkce způsobí porušení její kvadratičnosti, zmiňovaný algoritmus však řeší problém jinak, konkrétně následnou korekcí rovnic pro výpočet řízení. Dále s nelinearitou se algoritmus vypořádává tak, že systém v každém časovém kroku linearizuje vzhledem k reprezentativní trajektorii. Linearizovaný systém je pak řešen klasickým přístupem *LQG*, avšak v jeho průběhu je do výpočtů ještě zasahováno. Jsou prováděny úpravy dílčích výsledků a opravy chyb z důvodu práce s linearizovaným nelineárním systémem pro zajištění konvergence algoritmu. Samotný algoritmus je odvozen a detailně popsán v [8], odkud je převzat následující zestručněný popis:

iLQG lokální řízení pro obecně nelineární stochastický systém

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k + f(x_k, u_k) \cdot \Delta k + F(x_k, u_k) \cdot e_k,\ k = 0, 1, \ldots, N-1, \\ x_{(k=0)} &= x_0, \end{aligned} \tag{2.1}$$

se ztrátovou funkcí

$$\mathrm{E}\left\{h(x_N) + \sum_{k=0}^{N-1} l(k, x_k, u_k)\right\}$$

je lokálně optimální řízení, které konstruujeme iterativně. Každá iterace začíná s posloupností přímovazebních řízení $\overline{u}_k$ a odpovídající bezšumovou trajektorií $\overline{x}_k$ získanou aplikací $\overline{u}_k$ na systém 2.1 s nulovým šumem. To je možno provést například pomocí Eulerovy integrace. Pak linearizujeme systém a kvadratizujeme ztrátu podél trajektorií $\overline{x}_k$ a $\overline{u}_k$. Následně získaný lineární systém s kvadratickou ztrátou vyjádříme v odchylkách stavových a řídících veličin od bezšumové trajektorie $\delta x_k = x_k - \overline{x}_k$ a $\delta u_k = u_k - \overline{u}_k$.

Veličiny charakterizující modifikovaný problém získané v každém čase k z $(\overline{x}_k, \overline{u}_k)$ jsou

$$\begin{aligned}
A_k &= I + \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \Delta k, \quad B_k = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \Delta k, \\
\mathbf{c}_{i,k} &= F^{[i]} \cdot \sqrt{\Delta k}, \quad C_{i,k} = \frac{\partial F^{[i]}}{\partial u} \cdot \sqrt{\Delta k}, \\
q_k &= l \cdot \Delta k, \quad \mathbf{q}_k = \frac{\partial l}{\partial x} \cdot \Delta k, \\
Q_k &= \frac{\partial^2 l}{\partial x \partial x} \cdot \Delta k, \quad P_k = \frac{\partial^2 l}{\partial u \partial x} \cdot \Delta k, \\
\mathbf{r}_k &= \frac{\partial l}{\partial u} \cdot \Delta k, \quad R_k = \frac{\partial^2 l}{\partial u \partial u},
\end{aligned}$$

kde $F^{[i]}$ označuje i-tý sloupec matice F a veličiny „q“ se počítají v čase $k = N$ z funkce h namísto l.

Dále zaveďme označení

$$\begin{aligned}
\mathbf{g}_k &= \mathbf{r}_k + B_k^T \mathbf{s}_{k+1} + \sum_i C_{i,k}^T S_{k+1} \mathbf{c}_{i,k}, \\
G_k &= P_k + B_k^T S_{k+1} A_k, \\
H_k &= R_k + B_k^T S_{k+1} B_k + \sum_i C_{i,k}^T S_{k+1} C_{i,k}.
\end{aligned}$$

Zpětnovazební řízení pak hledáme ve tvaru $\delta u_k(\delta x) = \mathbf{l}_k + L_k \delta x$, kde $\mathbf{l}_k = -H_k^{-1} \mathbf{g}_k$ a $L_k = -H_k^{-1} G_k$. Přičemž parametry S_k a $\mathbf{s}_k$ jsou počítány rekurzivně z rovnic

$$\begin{aligned}
S_k &= Q_k + A_k^T S_{k+1} A_k + L_k^T H_k L_k + L_k^T G_k + G_k^T L_k, \\
\mathbf{s}_k &= \mathbf{q}_k + A_k^T \mathbf{s}_{k+1} + L_k^T H_k \mathbf{l}_k + L_k^T \mathbf{g}_k + G_k^T \mathbf{l}_k.
\end{aligned} \tag{2.2}$$

V důsledku linearizace obecně nelineárního systému mohou vyjít některá vlastní čísla matice H nulová nebo záporná. Řešení tohoto problému spolu s ošetřením požadavku na omezené vstupy u je detailně popsáno v [8]. Pokud však nepotřebujeme vyhovět požadavku na nekladná vlastní čísla matice H a omezené vstupy, lze rovnice 2.2 zjednodušit a pokud dále šum nezávisí na řízení (tedy $C_{i,k} = 0$), rovnice 2.2 se redukuje na Riccatiho rovnici klasického LQ regulátoru.

2.2 Algoritmus iterativního lokálního dynamického programování

Algoritmus *iLDP* byl vytvořen pro účely nalezení stochastického optimálního řízení v mnohadimenzionálních stavových a řídících prostorech. Tento případ je častý zejména při řízení biologických pohybů. Metoda je popsána autory v článku [7] a z tohoto zdroje je také převzata.

Základní popis algoritmu, tak jak ho autoři podali, je však pouze šablonou a mnoho detailů a dílčích částí je ponecháno na vyřešení při konkrétní realizaci. To se týká hlavně

použitých aproximací pro jednotlivé funkce, zejména aproximace Bellmanovy funkce a aproximace hledaného regulátoru. Dále, protože algoritmus využívá hledání minima, není v základním popisu algoritmu vyřešen konkrétní typ minimalizace. Použitý minimalizační algoritmus se samozřejmě liší podle konkrétního problému, zejména jedná-li se o minimalizaci omezenou nebo neomezenou. Ještě je třeba zmínit, že pro algoritmus je nutno zvolit parametr „velikosti“ okolí, protože se jedná o lokální metodu.

2.2.1 Formulace problému

Naším úkolem je nalézt řízení $u = \pi(t, x)$, které minimalizuje očekávanou ztrátu

$$J(\pi) = E_\omega \left(h(x) + \int_0^T l(x, \pi(t, x))dt \right),$$

obecně pro spojitý systém:

$$\begin{aligned} d\mathbf{x} &= f(x, u)dt + F(x, u)d\omega, \\ x(0) &= x_0, \\ t &\in [0, T], \end{aligned} \tag{2.3}$$

v diskrétním tvaru:

$$\begin{aligned} x_{k+1} - x_k &= f(x, u) \cdot \Delta k + F(x, u)e_k, \\ x_{(k=0)} &= x_0, \\ k &\in \{0, 1, \ldots, N\}, \\ \Delta k &= \frac{T}{N}, \end{aligned} \tag{2.4}$$

kde hledáme řízení $u = \pi(k, x)$, které minimalizuje očekávanou ztrátu

$$J(\pi) = E \left(h(x) + \sum_{k=0}^{N-1} l_k(x, \pi(k, x)) \cdot \Delta k \right).$$

2.2.2 Osnova algoritmu

Algoritmus pracuje iteračně, každá iterace začne s řízením π a vytvoří zlepšení π'. Přičemž prvotní řešení π_0 musíme algoritmu dodat jako apriorní informaci. Pro zajištění globální konvergence je možno nové řešení hledat jako konvexní kombinaci starého a algoritmem nalezeného řešení

$$\pi^{nové} = \alpha\pi' + (1 - \alpha)\pi;\ 0 < \alpha \leq 1;\ J(\pi^{nové}) < J(\pi).$$

V každé iteraci proběhne nejprve přípravná fáze, kdy z řízení $\pi(k,x)$ generuje průměrnou trajektorii $\bar{x}(k)$ řešením rovnice 2.3 respektive 2.4. Následně se počítá aproximace $\tilde{V}(k,x)$ Bellmanovy funkce $V(k,x)$ v čase odzadu, tj. od N k 1. Současně počítáme i aproximaci řízení $\pi'(k,x)\ldots\pi'(N-1,x)$. Tedy pro každý čas k takový, že $k = N-1\ldots 1$ jdeme zpět, přičemž pokládáme v koncovém čase N hodnotu aproximace Bellmanovy funkce $\tilde{V}(N,x) = h(x)$ a provádíme následující čtyři kroky:

1. Generujeme množinu stavů $\left\{x^{(n)}\right\}_{n=1\ldots M}$ shromážděných kolem průměrného stavu $\bar{x}(k)$.

2. Pro každé $x^{(n)}$ vypočítáme optimální řízení $u^{(n)}$ minimalizací Hamiltoniánu

$$H(k,x,u) = l(x,u) + f(x,u)^T\tilde{V}_x(k+1,x) + \frac{1}{2}\mathbf{tr}\left(\sum(x,u)\tilde{V}_{xx}(k+1,x)\right)$$

   s inicializačním bodem $\pi(k,x^{(n)})$. Kde $\Sigma(x,u) = F(x,u)F(x,u)^T$. Tedy optimální řízení v čase k pro stav n hledáme jako

$$u^{(n)} = \arg\min_u H(k,x,u).$$

3. Pro každé $x(k)$ aproximovat $v^{(n)} = V(k,x^{(n)})$ použitím Hamilton-Jacobi-Bellmanovy rovnosti

$$V(k,x^{(n)}) \approx \Delta k \cdot H(k,x^{(n)},u^{(n)}) + \tilde{V}(k+1,x^{(n)}).$$

4. Vypočítat novou aproximaci funkce $\tilde{V}(k,x)$ z množiny bodů $\left\{x^{(n)},v^{(n)}\right\}$ a aproximaci řízení $\pi'(k,x^{(n)})$ definované pro všechna x jako z množiny bodů $\left\{x^{(n)},u^{(n)}\right\}$.

2.2.3 Detaily implementace

Uvedený obecný popis algoritmu může být aplikován mnoha způsoby v závislosti na konkrétních volbách v každém z kroků algoritmu. Jedná se zejména o následující případy:

Volba okolí v *bodě 1.*

Zde se projevuje lokálnost metody. Množina stavů $\left\{x^{(n)}\right\}$ je vybrána z okolí průměrného stavu $\bar{x}(k)$. Toto okolí a způsob výběru množiny je třeba konkrétně specifikovat. Pro účely implementace algoritmu bylo okolí specifikováno parametrem ρ^2. Množina stavů $\left\{x^{(n)}\right\}$ pak byla generována náhodně jako náhodná veličina s normálním rozdělením se střední hodnotou rovnou průměrnému stavu $\bar{x}(k)$ a rozptylem specifikovaným parametrem ρ^2.

Počet vzorků M je nutno zvolit při implementaci algoritmu. Obecně je nejlepší volit maximální možné číslo, ovšem s rostoucím počtem vzorků rostou i paměťové nároky a výpočetní čas algoritmu.

Minimalizace v *bodě 2.*

Pro minimalizaci lze použít například minimalizační funkce programu *Matlab* z balíku *Optimization Toolbox*, konkrétně se jedná o funkce `fminunc` respektive `fmincon` pro neomezenou, respektive omezenou minimalizaci. V případě, kdy je možno spočítat minimalizaci analyticky, jedná se samozřejmě o nejlepší způsob.

Použití aproximací v *bodě 4.*

Aproximace je třeba zvolit ještě před zahájením výpočtu algoritmu, avšak právě v *bodě 4.* je třeba je vypočítat z množiny párů hodnot. Konkrétně se jedná o aproximaci Bellmanovy funkce $\tilde{V}$ a aproximaci řízení π. Volíme aproximace v jednodušším tvaru z důvodu výpočetní náročnosti, protože jsou počítány opakovaně. Dále je nutno vygenerovat dostatečný počet M vzorků $\left\{x^{(n)}\right\}$ v *bodě 1.*, abychom měli dostatek dat pro určení koeficientů aproximací. I když nám volnost ve volbě aproximací přináší relativně velkou svobodu při návrhu algoritmu *iLDP*, jedná se současně i o největší slabinu, protože autoři explicitně neuvádějí, jaké aproximace volit. Následně, při implementaci algoritmu pro systém s větším počtem dimenzí, může být Bellmanova funkce velmi složitá a právě její vhodnou aproximaci se nemusí podařit nalézt.

2.2.4 Konkrétní použité aproximace

Výpočet hodnot a aproximace $\tilde{V}$ ($\tilde{V}_x, \tilde{V}_{xx}$) je opakovaný. Je tedy třeba vysoké optimalizace, proto je použita lineární aproximace ve tvaru lineární kombinace dvakrát diferencovatelných základních funkcí $\phi(x) \in \mathbf{R}^P$, kde $P < N$. Jako základní funkce mohou být voleny například funkce 1, x_i, $x_i x_j$, $x_i^2 x_j$. Aproximace je volena jako časově proměnná, kdy $\tilde{V}(k,x) = \phi(x - \bar{x}(k))^T \mathbf{w}(k)$, kde $\mathbf{w}(k)$ je parametrický vektor závislý na čase k.

Označme $\tilde{V}_x = \phi_x^T \mathbf{w}$ a $\tilde{V}_{xx} = \phi_{xx}^T \mathbf{w}$ první a druhou derivaci aproximace Bellmanovy funkce podle proměnné x, respektive *vektor* a *matici* parciálních derivací podle složek vektoru x. Parametry aproximace pro jednotlivé časy $\mathbf{w}$ se určí lineární regresí. Pro $\mathbf{v} = \left[v^{(1)} \dots v^{(M)}\right]$ vektor cílových hodnot a matici $\mathbf{\Phi} = \left[\phi(x^{(1)} - \bar{x}(k)) \dots \phi(x^{(M)} - \bar{x}(k))\right]$ je minimální kvadratická odchylka $\| \mathbf{v} - \mathbf{\Phi}^T \mathbf{w} \|^2$ pro volbu parametru $\mathbf{w} = \left(\mathbf{\Phi}\mathbf{\Phi}^T\right)^{-1} \mathbf{\Phi}\mathbf{v}$.

Protože je průměrná trajektorie $\bar{x}(k)$ konstantní v iteraci algoritmu, je z důvodu urychlení výpočtu aproximace vycentrována v tomto bodě. Množina $\left\{x^{(n)}\right\}$ je časově proměnná, abychom nemuseli v každém kroku počítat $\left(\mathbf{\Phi}\mathbf{\Phi}^T\right)^{-1} \mathbf{\Phi}$, položíme $x^{(n)} = \bar{x}(k) + \varepsilon^{(n)}$, kde $\left\{\varepsilon^{(n)}\right\}$ je stejná pro všechny časy k. Množina$\left\{x^{(n)}\right\}$ se pak jakoby pohybuje podél trajektorie $\bar{x}(k)$. Tedy $\tilde{V}(k, x^{(n)}) = \phi(\varepsilon^{(n)})^T \mathbf{w}(k)$ a Φ je konstantní nejen v čase, ale i v iteracích algoritmu a matici $\left(\mathbf{\Phi}\mathbf{\Phi}^T\right)^{-1} \mathbf{\Phi}$ je možno předpočítat (což by nešlo při závislosti na stavech).

2.2.5 Předběžný odhad vlatností algoritmu

V tomto odstavci jsou uvedeny předběžné odhady vlastností algoritmu, jeho výhody a nevýhody. Tyto odhady byly učiněny na základě popisu algoritmu, dále podle samotného hodnocení autorů v článku [7] a následně i v průběhu implementace metody. Později budou konfrontovány s pozorováními získaných výsledků a závěry simulací, aby bylo zřejmé, která očekávání byla naplněna a která nikoliv. Tento postup může být velmi užitečný zejména z důvodu posouzení, které charakteristické vlastnosti algoritmu *iLDP* jsou patrny pouze při letmém prostudování a naopak, pro které je nutno algoritmus implementovat a otestovat.

Výhody

- duální metoda (lépe se vypořádá s neznalostí oproti neduálním metodám, například LQG)
- lepší zvládnutí šumu
- rychlejší dosažení požadované hodnoty
- možnost aplikace na mnoharozměrové stavové a řídící prostory
- univerzálnost (vychází z obecných principů) a svoboda výběru konkrétních aproximací a minimalizací

Nevýhody

- vyšší časová náročnost
- numerické výpočty (minimalizace)
- nepřesnost v důsledku aproximace klíčových funkcí v algoritmu a problémy s jejich volbou
- implementační složitost
- lokálnost metody a tedy i nalezeného řešení
- volba okolí (lokální metoda)

3 Systémy pro testování

3.1 Jednoduchý systém

3.1.1 Popis problému

Tato úloha byla převzata z článku [6]. Sami autoři [6] pak přejali tento problém z [1].

Jedná se o integrátor s neznámým ziskem, tedy lineární časově invariantní systém s jedním vstupem a jedním výstupem

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= y_k + bu_k + \sigma e_k, \\ b &\sim \mathcal{N}(\hat{b}, P), \\ e_k &\sim \mathcal{N}(0,1), \\ \mathrm{cov}(e_k, b_k) &= 0,\ \forall k. \end{aligned} \tag{3.1}$$

kde y_k je výstup nebo také stav procesu v čase k, u_k je řízení v čase k. Varianci šumu σ^2 předpokládáme známou, stejně jako počáteční hodnoty systému y_0, $\hat{b}_0$ a P_0. Úkolem je nalézt zpětnovazební řízení

$$u_k^* = u_k^*(y_k, y_{k-1}, \ldots, y_0, u_{k-1}, u_{k-2}, \ldots, u_0),\ 0 \leq k \leq N-1$$

minimalizující očekávanou ztrátu

$$\begin{aligned} J_0 &= \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} g_k \right\}, \\ g_k &= (y_{k+1} - r_{k+1})^2, \end{aligned} \tag{3.2}$$

pro daný časový horizont N a referenční signál, tj. požadovanou hodnotu výstupu, ve formě posloupnosti $\{r_k\}_{k=1}^N$. Diskrétní časový krok Δk pokládáme roven jedné časové jednotce, tedy $\Delta k = 1$.

3.1.2 Úpravy rovnic

Při řešení tohoto problému je výhodné podle [1] nahlížet na systém jako úlohu s postačující statistikou $H_k = [y_k, \hat{b}_k, P_k]$. Kde y_k reprezentuje stav původní y_k, dále $\hat{b}_k$ je střední hodnota neznámého parametru b a P_k jeho variance.

Pak první rovnici v 3.1 doplníme rovnicemi, ze kterých mohou být rekurzivně napočítány parametry $\hat{b}_k$ a P_k

$$\begin{aligned} \hat{b}_{k+1} &= \hat{b}_k + K_k(y_{k+1} - y_k - \hat{b}_k u_k), \\ P_{k+1} &= (1 - K_k u_k)P_k, \\ K_k &= \frac{u_k P_k}{u_k^2 P_k + \sigma^2}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Ztráta v čase k je

$$J_k = \min_{u_k} \mathrm{E}_{e_k,b} \left\{ g_k + J_{k+1} \mid y_k, y_{k-1}, \ldots, u_{k-1}, u_{k-2}, \ldots \right\},$$

kde se střední hodnota počíta přes e_k a b. Systém 3.1 je lineární, Gaussovský a máme k dispozici sdruženou hustotu rozdělení pravděpodobnosti $f(b_k) = N(\hat{b}_k, P_k)$, jejíž parametry se vyvíjejí rekurzivně podle 3.3. Je tedy možno upravit ztrátovou funkci J_k, dosadíme-li za $g_k = (y_{k+1} - r_{k+1})^2$ z 3.2 a následně z 3.1 za $y_{k+1} = y_k + bu_k + \sigma e_k$:

$$\begin{aligned} J_k &= \min_{u_k} \mathrm{E}_{e_k,b} \left\{ (y_k + bu_k + \sigma e_k - r_{k+1})^2 + J_{k+1} \mid y_k, y_{k-1}, \ldots, u_{k-1}, u_{k-2}, \ldots \right\} \\ &= \min_{u_k} \mathrm{E}_{e_k} \left\{ (y_k + \hat{b}u_k + \sigma e_k - r_{k+1})^2 + P_k u_k^2 \mid y_k, y_{k-1}, \ldots, u_{k-1}, u_{k-2}, \ldots \right\} + \\ &\quad + \min_{u_k} \mathrm{E}_{e_k,b} \left\{ J_{k+1} \mid y_k, y_{k-1}, \ldots, u_{k-1}, u_{k-2}, \ldots \right\} \end{aligned}$$

A ztráta v čase k je pak vyjádřena ve tvaru

$$g_k = (y_k - r_{k+1})^2 + P_k u_k^2.$$

Následně lze zadání úlohy formulovat jako:

$$\text{Rovnice systému :} \quad \begin{bmatrix} y_{k+1} \\ \hat{b}_{k+1} \\ P_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_k + \hat{b}_k u_k \\ \hat{b}_k + \frac{u_k P_k}{u_k^2 P_k + \sigma^2}(y_{k+1} - y_k - \hat{b}_k u_k) \\ (1 - \frac{u_k P_k}{u_k^2 P_k + \sigma^2} u_k) P_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma e_k \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Ztráta v čase } k: \qquad g_k = (y_k - r_{k+1})^2 + P_k u_k^2 \tag{3.4}$$

3.1.3 Aplikace metody CE

Princip metody označené jako CE (z anglického „Certainty Equivalence“) je velmi jednoduchý. Neznámé parametry v systému nahradíme jejich očekávanými hodnotami a dále všechny výpočty provádíme, jako kdyby byly parametry známé. Takto získané řízení samozřejmě není duální a pokud se skutečná hodnota neznámého parametru výrazněji odchyluje od očekávané hodnoty, se kterou počítáme, dopouštíme se značné chyby. Zmiňovaná metoda je použita jako první přiblížení a hlavně pro srovnání s dalšími algoritmy.

Triviální CE regulátor

Při návrhu prvního, nejjednoduššího regulátoru uvažujeme pouze rovnici 3.1 a nahradíme v ní parametr b jeho očekávanou hodnotou $\hat{b}$, což vede na

$$y_{k+1} = y_k + \hat{b}u_k + \sigma e_k.$$

Se ztrátovou funkcí nebudeme explicitně počítat. Místo toho předpokládáme, že ztráta bude minimální, dosáhneme-li požadované hodnoty r_{k+1} v jednom kroku. Položíme tedy $y_{k+1} = r_{k+1}$, šum neuvažujeme (respektive jej nahradíme jeho střední hodnotou, což je nula) a z rovnice vyjádříme řízení u_k v čase k jako

$$u_k = \frac{r_{k+1} - y_k}{\hat{b}}.$$

Zde je samozřejmě nutné předpokládat, že očekávaná hodnota $\hat{b}$ není rovna nule. Tento předpoklad může být omezující, protože z pohledu původní rovnice s neznámým parametrem b nastane problém pouze, když samotný parametr b nabývá hodnoty nula. To pak zřejmě řízení nemá na systém žádný vliv. Chceme-li tento přístup použít pro libovolné $\hat{b}$ (tedy i pro $\hat{b} = 0$), je možno například volit jmenovatel zlomku ve výrazu pro řízení místo $\hat{b}$ jako $\hat{b} + \varepsilon$ s vhodným parametrem ε, následně pak

$$u_k = \frac{r_{k+1} - y_k}{\hat{b} + \varepsilon}, \quad \hat{b} + \varepsilon \neq 0.$$

3.1.4 Algoritmus LQG

Algoritmus *LQG* („Linear-Quadratic-Gaussian“) je vhodný k nalezení řízení pro lineární systémy s kvadratickou ztrátovou funkcí a gaussovským šumem. To je sice případ zde uvažovaného *jednoduchého systému*, ale algoritmus *LQG* není v základní implementaci 2.1.2 duální. Nedokáže si tedy poradit s neznámým parametrem b a je nutné použít nějaké aproximace. Opět tedy využijeme principu CE a nahradíme parametr b jeho očekávanou hodnotou $\hat{b}$. *LQG* algoritmus využívá Kalmanova filtru a dokáže tedy lépe zvládat šumy a nepřesnosti měření.

LQG regulátor

Jak již bylo zmíněno v předchozím textu, řízení *LQG* je založeno na principu separace, tedy estimátor a regulátor jsou navrhovány zvlášť. Máme-li k dispozici matice, popisující systém, stačí pro nalezení řízení pouze dosadit do rovnic v částech 1.3.2 a 2.1.2. Tento postup můžeme aplikovat na matice získané z rovnice 3.1, pak získáme jednoduché řízení, které ale předpokládá parametr b známý a jedná se tedy o princip CE. Matice systému budou v tomto případě

$$\begin{aligned} A &= 1, \quad B = \hat{b}, \\ C &= 1, \quad N = \sigma. \end{aligned}$$

A úpravou ztrátové funkce

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left\{\sum_{k=0}^{N-1} g_k\right\} &= \mathbf{E}\left\{\sum_{k=0}^{N-1} (y_{k+1}-r_{k+1})^2\right\} \\ &= \mathbf{E}\left\{\sum_{k=0}^{N-1} \psi_{k+1}^2\right\} = \mathrm{E}\left\{\sum_{k=0}^{N-1} \left(\psi_{k+1}^T Q_k \psi_{k+1}\right)\right\},\end{aligned}$$

kde ψ_k reprezentuje rozdíl $y_k - r_k$, získáme matice Q a R ve tvaru

$$Q = 1, \quad R = 0.$$

Nebo se můžeme pokusit o aplikaci na systém 3.4, který vznikl úpravou systému 3.1 a odhaduje očekávanou hodnotu a varianci neznámého parametru b, ale není lineární. Je tedy třeba systém 3.4 linearizovat, nejlépe v každém časovém kroku k. Potřebujeme tedy nějakou reprezentativní trajektorii a systém následně linearizujeme rozvojem do prvního řádu do Taylorovy řady se středem v této trajektorii a tento postup opakujeme pro každý čas k. Následně získáme matice linearizovaného systému

$$A_k = \frac{\partial}{\partial(y_k,\hat{b}_k,P_k)} \begin{bmatrix} y_{k+1} \\ \hat{b}_{k+1} \\ P_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & u_k & 0 \\ -\frac{u_k P_k}{u_k^2 P_k+\sigma^2} & 1-\frac{u_k^2 P_k}{u_k^2 P_k+\sigma^2} & \frac{u_k\sigma^2\left(y_{k+1}-y_k-\hat{b}u_k\right)}{\left(u_k^2 P_k+\sigma^2\right)^2} \\ 0 & 0 & 1-\frac{u_k^2 P_k\left(u_k^2 P_k+2\sigma^2\right)}{\left(u_k^2 P_k+\sigma^2\right)^2} \end{pmatrix},$$

$$B_k = \frac{\partial}{\partial u_k} \begin{bmatrix} y_{k+1} \\ \hat{b}_{k+1} \\ P_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{b} \\ \frac{\left(P_k\sigma^2-u_k^2P_k^2\right)\left(y_{k+1}-y_k+2\hat{b}u_k\right)}{\left(u_k^2P_k+\sigma^2\right)^2} \\ -\frac{2u_kP_k^2\sigma^2}{\left(u_k^2P_k+\sigma^2\right)^2} \end{pmatrix}.$$

Matice pro výpočet Kalmanova filtru jsou v čase konstantní a rovny

$$C_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N_k = \sigma.$$

Pro ztrátovou funkci upravíme ztrátu systému 3.4 následovně

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left\{\sum_{k=0}^{N-1} g_k\right\} &= \mathbf{E}\left\{\sum_{k=0}^{N-1} \left((y_k-r_{k+1})^2 + P_k u_k^2\right)\right\} \\ &= \mathbf{E}\left\{\sum_{k=0}^{N-1} \left(\psi_k^2 + P_k u_k^2\right)\right\} = \mathrm{E}\left\{\sum_{k=0}^{N-1} \left(\psi_k^T Q_k \psi_k + u_k^T R_k u_k\right)\right\}\end{aligned}$$

kde ψ_k reprezentuje rozdíl $y_k - r_{k+1}$. Pak matice pro kvadratickou ztrátovou funkci Q a R jsou

$$\begin{aligned} Q_N &= \theta, \\ Q_k &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ R_k &= P_k. \end{aligned}$$

Tato verze LQG řízení je aplikována na upravené rovnice systému s postačující statistikou a je tedy na místě otázka, zda se již jedná o duální přístup. Na tomto místě je však těžké pouze na základě tvaru rovnic odpovědět, a proto bude tento problém diskutován až na základě výsledků simulací v kapitole 4.

3.1.5 iLQG

Metoda $iLQG$ je v podstatě rozšířením základního algoritmu pro nalezení LQ řízení a v triviálním případě se na tento algoritmus i redukuje. Proto většinu z veličin charakterizujících systém, potřebných pro výpočet $iLQG$ řízení, můžeme převzít z předchozí části o aplikaci LQG regulátoru. Postup jejich výpočtu je totiž prakticky totožný.

iLQG řízení

Veličiny budou uvedeny pouze pro případ jednoduchého systému s postačující statistikou, odhadující parametr b. Přičemž obecný tvar parametrů vychází z systému definovaného v 2.1.

$$
\begin{aligned}
A_k &= I + \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\Delta k = \begin{pmatrix} 1 & u_k & 0 \\ -\frac{u_k P_k}{u_k^2 P_k+\sigma^2} & 1-\frac{u_k^2 P_k}{u_k^2 P_k+\sigma^2} & \frac{u_k\sigma^2\left(y_{k+1}-y_k-\hat{b}u_k\right)}{\left(u_k^2 P_k+\sigma^2\right)^2} \\ 0 & 0 & 1-\frac{u_k^2 P_k\left(u_k^2 P_k+2\sigma^2\right)}{\left(u_k^2 P_k+\sigma^2\right)^2} \end{pmatrix}, \\
B_k &= \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\Delta k = \begin{pmatrix} \hat{b} \\ \frac{\left(P_k\sigma^2-u_k^2P_k^2\right)\left(y_{k+1}-y_k+2\hat{b}u_k\right)}{\left(u_k^2P_k+\sigma^2\right)^2} \\ -\frac{2u_kP_k^2\sigma^2}{\left(u_k^2P_k+\sigma^2\right)^2} \end{pmatrix}, \\
\mathbf{c}_{i,k} &= F^{[i]}\cdot\sqrt{\Delta k} = \begin{pmatrix} \sigma \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\
C_{i,k} &= \frac{\partial F^{[i]}}{\partial u}\cdot\sqrt{\Delta k} = 0, \\
q_k &= l\cdot\Delta k = (y_k - r_{k+1})^2 + P_k u_k^2, \\
\mathbf{q}_k &= \frac{\partial l}{\partial x}\cdot\Delta k = \begin{pmatrix} 2(y_k-r_{k+1}) \\ 0 \\ u_k^2 \end{pmatrix}, \\
Q_k &= \frac{\partial^2 l}{\partial x\partial x}\cdot\Delta k = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
P_k &= \frac{\partial^2 l}{\partial u\partial x}\cdot\Delta k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2u_k \end{pmatrix}, \\
\mathbf{r}_k &= \frac{\partial l}{\partial u}\cdot\Delta k = 2P_k u_k, \\
R_k &= \frac{\partial^2 l}{\partial u\partial u} = 2P_k.
\end{aligned}
$$

Obdobná otázka jako v předchozím případě řízení LQG, zda se jedná o duální metodu, bude opět diskutována na základě výsledků simulací v kapitole 4.

3.1.6 iLDP

Algoritmus implementujeme podle základní osnovy uvedené v 2.2.2, přičemž detaily implementace jsou voleny následovně:

Volba okolí

Množina stavů $\left\{x^{(n)}\right\}$ je volena jako náhodná veličina s normálním rozdělením se střední hodnotou rovnou průměrnému stavu $\bar{x}(k)$ a rozptylem specifikovaným parametrem ρ^2. Tedy $x_k^{(n)} = \overline{x}(k) + \varepsilon_k^{(n)}$, kde $\varepsilon_k^{(n)} \sim \mathcal{N}(0,\rho^2)$. Samotný parametr

ρ^2 pak volíme v řádu šumu, popřípadě o řád větší, aby okolí postihlo možné změny trajektorie v důsledku šumu, ale současně nezasahovalo příliš daleko.
Počet vzorků M je zde konkrétně volen 100, což se ukazuje jako dostatečné množství dat pro výpočet koeficientů aproximací.

Minimalizace

Zde použitá minimalizace je neomezená, je tedy užito minimalizační funkce programu *Matlab* (*Optimization Toolbox*) `fminunc`.

Aproximace řízení

Aproximace zpětnovazebního řízení v tomto případě vychází z *triviálního CE regulátoru* navrženého v 3.1.3, který rozšiřuje

$$\begin{aligned} \text{CE regulátor}: \qquad u_k &= \frac{r_{k+1} - y_k}{\hat{b} + \varepsilon}, \quad \hat{b} + \varepsilon \neq 0, \\ \text{Aproximace řízení}: \quad \pi(k,x) &= \frac{r_{k+1} - K_1 y_k}{K_2 \hat{b}_k + K_3 P_k + K_4}. \end{aligned}$$

Koeficienty aproximace $K_{1\ldots4}$ vypočítáme v každém čase k z množiny hodnot $\left\{x^{(n)}, u^{(n)}\right\}$ lineární regresí, tedy metodou nejmenších čtverů. Provedeme následující úpravy

$$\begin{aligned} \left(K_2\hat{b}_k + K_3 P_k + K_4\right)\pi(k,x) &= r_{k+1} - K_1 y_k, \\ \begin{pmatrix} y_k & \hat{b}_k\pi(k,x) & P_k\pi(k,x) & \pi(k,x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \\ K_4 \end{pmatrix} &= r_{k+1}. \end{aligned}$$

Rovnici označíme jako

$$\Psi K = R.$$

Následně dosadíme do Ψ vypočítaná x_k za $\begin{pmatrix} y_k & \hat{b}_k & P_k \end{pmatrix}^T$ a odpovídající vypočítaná u za $\pi(k,n)$, kdy dosazujeme celé vektory v n. Tedy výsledné Ψ je maticí rozměru $n\times4$. Aby mohla být rovnice splněna, položíme $R = r_{k+1}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \end{pmatrix}^T$, tedy sloupcový vektor ze samých r_{k+1}. A koeficienty K vypočítáme metodou nejmenších čtverců jako

$$K = \left(\Psi^T\Psi\right)^{-1}\Psi R.$$

Aproximace Bellmanovy funkce

Aproximace Bellmanovy funkce je volena po vzoru 2.2.4 jako lineární kombinace devíti základních funkcí

$$1,\ y_k,\ \hat{b}_k,\ \ln P_k,\ y_k^2,\ y_k\hat{b}_k,\ y_k \ln P_k,\ \hat{b}_k^2,\ \hat{b}_k \ln P_k.$$

Kdy se koeficienty aproximace určují lineární regresí podle vzorce uvedeného v 2.2.4. Proměnná P_k vystupuje v souboru základních funkcí v logaritmu z výpočetních důvodů. Nejdříve bylo užito základních funkcí pro P_k bez logaritmů, ale

výpočet koeficientů aproximace selhával, protože matice $\Phi\Phi^T$ vystupující ve vzorci pro lineární regresi byla blízko singulární matici. To způsobilo problémy při její následné inverzi, proto bylo P_k nahrazeno v bázových funkcích $\ln P_k$.

3.2 Synchronní motor s permanentními magnety

3.2.1 Popis systému

Následující model popisuje synchronní elektromotor s rotorem tvořeným permanentními magnety. Systém je popsán standartními rovnicemi synchronního stroje s permanentními magnety ve stacionárním tvaru

$$\begin{aligned}
\frac{di_\alpha}{dt} &= -\frac{R_s}{L_s} i_\alpha + \frac{\Psi_{PM}}{L_s}\omega \sin\vartheta + \frac{u_\alpha}{L_s}, \\
\frac{di_\beta}{dt} &= -\frac{R_s}{L_s} i_\beta - \frac{\Psi_{PM}}{L_s}\omega \cos\vartheta + \frac{u_\beta}{L_s}, \\
\frac{d\omega}{dt} &= \frac{k_p p_p^2 \Psi_{PM}}{J}\left(i_\beta \cos\vartheta - i_\alpha \sin\vartheta\right) - \frac{B}{J}\omega - \frac{p_p}{J} T_L, \\
\frac{d\vartheta}{dt} &= \omega.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Zde $i_{\alpha,\beta}$ reprezentují proudy a $u_{\alpha,\beta}$ napětí na statoru. Poloha (úhel otočení) rotoru je označen ϑ a ω je pak rychlost otáčení. Dále R_s je rezistance a L_s induktance statoru. Ψ_{PM} má význam magnetického toku permanentních magnetů rotoru, B tření a T_L je zatěžovací moment. Konstanta p_p označuje počet párů pólů a k_p Parkovu konstantu.

Cílem je návrh řízení bez senzorů, kdy čidla pro měření polohy a otáček nejsou (z různých důvodů) přítomna. Tedy jediné měřitelné veličiny jsou:

$$y(t) = \left(i_\alpha(t), i_\beta(t)\right), u_\alpha(t), u_\beta(t).$$

Které samozřejmě můžeme měřit jen s určitou přesností. Dále předpokládáme, že vstupy u_α a u_β jsou omezené a tato omezení jsou známa. Nyní chceme dosáhnout požadovaných otáček rotoru $\overline{\omega}(t)$ (skutečnou hodnotu $\omega(t)$ neznáme, pouze ji odhadujeme ze známých hodnot $y(t)$).

3.2.2 Úprava rovnic

Diskretizace

Provedení diskretizace modelu 3.5 pomocí Eulerovy metody vede na následující diskrétní popis:

$$\begin{aligned}
i_{\alpha,k+1} &= \left(1 - \frac{R_s}{L_s}\Delta k\right) i_{\alpha,k} + \frac{\Psi_{PM}}{L_s}\Delta k\omega_k \sin\vartheta_k + \frac{\Delta k}{L_s}u_{\alpha,k},\\
i_{\beta,k+1} &= \left(1 - \frac{R_s}{L_s}\Delta k\right) i_{\beta,k} - \frac{\Psi_{PM}}{L_s}\Delta k\omega_k \cos\vartheta_k + \frac{\Delta k}{L_s}u_{\beta,k},\\
\omega_{k+1} &= \left(1 - \frac{B}{J}\Delta k\right) \omega_k + \frac{k_p p_p^2 \Psi_{PM}}{J}\Delta k \left(i_{\beta,k}\cos\vartheta_k - i_{\alpha,k}\sin\vartheta_k\right) - \frac{p_p}{J}T_L\Delta k,\\
\vartheta_{k+1} &= \vartheta_k + \omega_k\Delta k.
\end{aligned}$$

Kde Δk označuje diskrétní časový okamžik. Předpokládáme, že parametry modelu známe, můžeme tedy provést následující substituci za účelem zjednodušení: $a = 1 - \frac{R_s}{L_s}\Delta k$, $b = \frac{\Psi_{PM}}{L_s}\Delta k$, $c = \frac{\Delta k}{L_s}$, $d = 1 - \frac{B}{J}\Delta k$, $e = \frac{k_p p_p^2 \Psi_{PM}}{J}\Delta k$. Pro jednoduchost uvažujme model bez zatížení, tedy zatěžovací moment T_L je nulový a zjednodušený model je:

$$\begin{aligned}
i_{\alpha,k+1} &= a i_{\alpha,k} + b\omega_k \sin\vartheta_k + c u_{\alpha,k},\\
i_{\beta,k+1} &= a i_{\beta,k} - b\omega_k \cos\vartheta_k + c u_{\beta,k},\\
\omega_{k+1} &= d\omega_k + e\left(i_{\beta,k}\cos\vartheta_k - i_{\alpha,k}\sin\vartheta_k\right),\\
\vartheta_{k+1} &= \vartheta_k + \omega_k\Delta k.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Tyto rovnice můžeme chápat jako popis systému se stavem $x_k = (i_{\alpha,k}, i_{\beta,k}, \omega_k, \vartheta_k)$, kde předchozí soustavu rovnic zapíšeme jako $x_{k+1} = g(x_k, u_k)$.

Odhad stavu

O skutečném stavu systému x_k máme informaci pouze v podobě měření $y_k = (i_{\alpha,k}, i_{\beta,k})$. Vlastní vývoj stavových proměnných může být ovlivněn šumem, pro jednoduchost předpokládáme Gaussovský šum s nulovou střední hodnotou a kovarianční maticí M_k. Pozorování stavu, tedy výstup y_k, je zatížen chybou měření, která je způsobena zaokrouhlením skutečné hodnoty na rozlišovací hodnotu stupnice přístroje. Z důvodu zjednodušení ale předpokládáme, že chyba měření bude mít ve výsledku normální rozdělení s nulovou střední hodnotou a kovarianční maticí N_k. K stejnému závěru bychom mohli dojít i použitím *centrální limitní věty* z teorie pravděpodobnosti. Tedy na vnitřní stav systému i na výstup můžeme pohlížet jako na náhodné veličiny s normálním rozdělením

$$\begin{aligned}
x_{k+1} &\sim \mathcal{N}\left(g(x_k), M_k\right),\\
y_k &\sim \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} i_{\alpha,k} \\ i_{\beta,k} \end{pmatrix}, N_k\right).
\end{aligned}$$

Nyní využijeme toho, že Kalmanův filtr je optimálním pozorovatelem lineárního systému s Gaussovským šumem. Zde uvažovaný systém 3.6 není lineární, ale můžeme využít

nelineární verze Kalmanova filtru, označované jako *rozšířený Kalmanův filtr* (Extended Kalman filter), který systém linearizuje v každém časovém kroku. Rovnice pro výpočet odhadu stavu pak budou následující

$$\begin{aligned} \hat{x}_{k+1} &= g(\hat{x}_k) - K\left(y_{k+1} - h(\hat{x}_k)\right), \\ K &= P_k C_k^T \left(C_k P_k C_k^T + N_k\right)^{-1}, \\ P_{k+1} &= A_k \left(P_k - P_k C_k^T \left(C_k P_k C_k^T + N_k\right)^{-1} C_k P_k\right) A_k^T + M_k, \end{aligned} \tag{3.7}$$

kde funkce h je $h(x_k) = (i_{\alpha,k}, i_{\beta,k})^T$ a matice A_k a C_k získáme linearizecí systému v každém kroku, tedy

$$\begin{aligned} A_k = \frac{d}{dx_k} g(x_k, u_k) &= \begin{pmatrix} a & 0 & b\sin\vartheta_k & b\omega_k\cos\vartheta_k \\ 0 & a & -b\cos\vartheta_k & b\omega_k\sin\vartheta_k \\ -e\sin\vartheta_k & e\cos\vartheta_k & d & -e\left(i_{\alpha,k}\cos\vartheta_k + i_{\beta,k}\sin\vartheta_k\right) \\ 0 & 0 & \Delta k & 1 \end{pmatrix}, \\ C_k = \frac{d}{dx_k} h(x_k) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ztrátová funkce

Cílem je dosáhnout požadovaných otáček rotoru $\overline{\omega}$. Pro zjednodušení uvažujme aditivní kvadratickou ztrátovou funkci

$$J = \mathrm{E}\left\{\sum_{k=0}^{N-1} l(x_k, u_k)\right\},$$

kdy ztráta v každém časovém kroku k je

$$l(x_k, u_k) = (\omega_k - \overline{\omega}_k)^2 + r(u_{\alpha,k}^2 + u_{\beta,k}^2),$$

kde r je vhodný parametr penalizace za vstupy, který je ovšem potřeba doladit. Tento výraz můžeme upravit do maticové podoby

$$\begin{aligned} l(x_k, u_k) &= (\omega_k - \overline{\omega}_k)\, Q\, (\omega - \overline{\omega}_k) + (u_{\alpha,k}, u_{\beta,k}) \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{\alpha,k} \\ u_{\beta,k} \end{pmatrix} \\ &= \psi_k^T Q \psi_k + u_k^T R u_k, \end{aligned}$$

kde ψ_k značí rozdíl vektoru stavu a pořadované hodnoty $\psi_k = x_k - \overline{x}_k$ a matice Q a R pak mají tvar

$$\begin{aligned} Q &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ R &= \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

3.2.3 Aplikace iLDP

K implementaci *iLDP* algoritmu je nutno podotknout, že jsem zatím nevytvořil funkční verzi. Je to zejména z důvodu, že se nepodařilo nalézt vhodnou aproximaci Bellmanovy funkce. Přesto je zde uveden postup aplikace tohoto algoritmu.

Postačující statistika

Pro aplikaci *iLDP* metody je vhodné nejdříve zavést postačující statistiku. Volme tedy $\tilde{S}_k = (\hat{x}_k, P_k)$, kde $\hat{x}_k$ má význam odhadu stavu a P_k kovarianční matice, přičemž tyto parametry se vyvíjejí v čase podle rovnic 3.7. Následně, kdybychom chtěli zahrnout do aproximace Bellmanovy funkce všechny členy $\tilde{S}_k$, jednalo by se o příliš velké množství dat. Samotný vektor $\hat{x}_k$ má v každém čase k čtyři složky a kovarianční matice P_k pak šestnáct složek. Hledáme-li aproximaci Bellmanovy funkce po vzoru 2.2.4, získáme dvacet členů prvního řádu a mnohonásobně víc členů druhého řádu. V takovémto případě je implementace algoritmu prakticky nemožná, omezíme se tedy na postačující statistiku ve tvaru $S_k = \left(\hat{x}_k, P_k^{(3,3)}, P_k^{(4,4)}\right)$, odhadu stavu a variancí odhadů složek rychlosti a otáček, které právě nemůžeme měřit.

Detaily implementace algoritmu

Základní návrh implementace vychází z verze algoritmu pro jednoduchý systém viz 3.1.6, kterou modifikuje a rozšiřuje.

Okolí $\left\{x^{(n)}\right\}$ je voleno opět jako náhodná veličina s normálním rozdělením se střední hodnotou rovnou průměrnému stavu $\bar{x}(k)$ a rozptylem specifikovaným parametrem ρ^2. Počet vzorků M je ponechán na hodnotě 100, i když byly testovány i jiné hodnoty.

Protože se úloha řízení synchronního motoru snaží do jisté míry přiblížit realitě, uvažujeme vstupy jako omezené. Tedy předpokládáme, že zdroj nemůže dodat na vstup libovolné napětí, ale je třeba dodržet jistá omezení. Zde budou omezení vstupů reprezentována podmínkou

$$u_\alpha^2 + u_\beta^2 \leq u_{max}^2,$$

kde u_{max} předpokládáme jako zadanou konstantu. Pro minimalizaci v algoritmu *iLDP* je tedy třeba užít omezené minimalizace, zde je použita minimalizační funkce programu *Matlab* (*Optimization Toolbox*) `fmincon`.

Volba aproximací

Aproximaci Bellmanovy funkce vytvoříme na základě postačující statistiky $S_k = \left(\hat{x}_k, P_k^{(3,3)}, P_k^{(4,4)}\right)$, tedy dle 2.2.4 volíme lineární kombinace základních funkcí a na základě zkušeností s jednoduchým systémem použijeme místo variancí jejich logaritmy. Soubor základních

funkcí je pak

$$1,\ \hat{x}_k^{(1)},\dots,\hat{x}_k^{(4)},\ \ln P_k^{(3,3)},\ \ln P_k^{(4,4)},\ \left(\hat{x}_k^{(1)}\right)^2,\ \hat{x}_k^{(1)}\hat{x}_k^{(2)},\dots,\hat{x}_k^{(1)}\hat{x}_k^{(4)},$$
$$\hat{x}_k^{(1)}\ln P_k^{(3,3)},\ \hat{x}_k^{(1)}\ln P_k^{(4,4)},\ \left(\hat{x}_k^{(2)}\right)^2,\ \hat{x}_k^{(2)}\hat{x}_k^{(3)},\ \hat{x}_k^{(2)}\hat{x}_k^{(4)},$$
$$\hat{x}_k^{(2)}\ln P_k^{(3,3)},\ \hat{x}_k^{(2)}\ln P_k^{(4,4)},\ \left(\hat{x}_k^{(3)}\right)^2,\ \hat{x}_k^{(3)}\hat{x}_k^{(4)},\ \hat{x}_k^{(3)}\ln P_k^{(3,3)},$$
$$\hat{x}_k^{(3)}\ln P_k^{(4,4)},\ \left(\hat{x}_k^{(4)}\right)^2,\ \hat{x}_k^{(4)}\ln P_k^{(3,3)},\ \hat{x}_k^{(4)}\ln P_k^{(4,4)}.$$

Ale i takový soubor základních funkcí může být příliš velký, proto byla zkoušena i možnost s vynecháním prvních dvou členů $\hat{x}_k$, tedy proudů i_α a i_β. Naopak byly přidány kvadráty logaritmů variancí. Druhý možný soubor je tedy

$$1,\ \hat{x}_k^{(3)},\ \hat{x}_k^{(4)},\ \ln P_k^{(3,3)},\ \ln P_k^{(4,4)},\ \left(\hat{x}_k^{(3)}\right)^2,\ \hat{x}_k^{(3)}\hat{x}_k^{(4)},$$
$$\hat{x}_k^{(3)}\ln P_k^{(3,3)},\ \hat{x}_k^{(3)}\ln P_k^{(4,4)},\ \left(\hat{x}_k^{(4)}\right)^2,\ \hat{x}_k^{(4)}\ln P_k^{(3,3)},$$
$$\hat{x}_k^{(4)}\ln P_k^{(4,4)},\ \left(\ln P_k^{(3,3)}\right)^2,\ \ln P_k^{(3,3)}\ln P_k^{(4,4)},\ \left(\ln P_k^{(4,4)}\right)^2.$$

Aproximace řízení byly volena a zkoušena v několika různých tvarech. Jednalo se o přímovazební řízení $\pi(k,x)=\overline{u}_k$, kde hodnotu řízení $\overline{u}_k$ získáme jako střední hodnotu přes vzorky n všech řízení $\left\{u^{(n)}\right\}$ v čase k. Dále, protože se jedná o točivý stroj, byla testována zpětnovazební aproximace řízení ve tvaru lineární kombinace funkcí $\sin\vartheta,\ \cos\vartheta,\ \sin^2\vartheta,\ \cos^2\vartheta$. Nakonec byla ještě zkoušena aproximace získaná vyjádřením veličiny u_k z rovnic systému a doplnění o koeficienty po vzoru nalezení aproximace řízení v 3.1.6.

Problém aplikace iLDP

Žádný z výše uvedených postupů nevedl k nalezení funkčního řízení, pro zadaný problém synchronního motoru s permanentními magnety. Jako zásadní problém zde shledávám netriviální úkol nalezení vhodných aproximací. V případě vícerozměrného nelineárního systému to může být velmi náročné a nahodilé zkoušení volby různých aproximací zřejmě nemusí vést k cíli. Jednou z možností je vyjít z jednodušší metody, například LQG nebo modifikované $iLQG$, a aproximace vytvořit po vzoru jejích funkcí. Pak bychom však obdrželi v podstatě stejně „přesnou“ metodu jako je ta, ze které jsme vyšli, jenom by byl náš algoritmus $iLDP$ časově náročnější z důvodu numerických výpočtů. Vhodným kandidátem na metodu, z níž by bylo možné vyjít, je algoritmus LQG, pomocí kterého se podařilo implementovat funkční řízení.

3.2.4 Algoritmus LQG

Zde navržený algoritmus LQG není duální, neurčitosti v systému tedy zvládá hůře než případná duální metoda. Dále algoritmus předpokládá lineární systém a kvadratickou ztrátu. Ztrátu jsme z důvodu jednoduchosti jako kvadratickou volili již na počátku, je

ale třeba linearizovat systém v každém časovém kroku. Dále LQG je založeno na principu separace, tedy estimátor a regulátor navrhujeme zvlášť. Estimátorem zvolíme rozšířený Kalmanův filtr, jehož rovnice jsou uvedeny v části 3.2.2. Jako regulátor použijeme LQ regulátor, který je popsán v 2.1.2.

Požadovaná hodnota

Protože jednoduchý systém v 3.1 byl lineární, bylo prakticky jedno, na jakou požadovanou hodnotu jej řídíme. Díky linearitě můžeme totiž hodnoty vždy posunout. Regulátor LQ je navržen pro lineární systém, předpokládá tedy linearitu a hledá řízení pouze na nulovou hodnotu. Tedy snaží se minimalizovat odchylku od nuly. Zde uvažovaný systém je ale nelineární, a když chceme řídit na nenulovou požadovanou hodnotu, v tomto případě jde o požadované otáčky $\overline{\omega}$, nelze pouze nalézt LQ řízení na nulu a následně řešení posunout. Je proto třeba požadovanou hodnotu již od počátku zahrnout do našich uvažování a přidat ji do systému jako novou stavovou proměnnou, byť může být v celém časovém vývoji systému konstantní.

Provedeme tedy substituci. Chceme řídit na nulu $\omega_k - \overline{\omega}_k$ rozdíl skutečných a požadovaných otáček, tuto veličinu tedy označíme jako ψ_k a následně $\psi_k = \omega_k - \overline{\omega}_k$. Z tohoto výrazu si můžeme vyjádřit stavovou proměnnou otáček jako $\omega_k = \psi_k + \overline{\omega}_k$. Nyní v rovnicích 3.6 dosadíme za ω_k a přidáním další rovnice pro vývoj požadované hodnoty $\overline{\omega}_k$ získáme rovnice nového systému v pěti stavových proměnných

$$\begin{aligned}
i_{\alpha,k+1} &= a i_{\alpha,k} + b\left(\psi_k + \overline{\omega}_k\right)\sin\vartheta_k + c u_{\alpha,k}, \\
i_{\beta,k+1} &= a i_{\beta,k} - b\left(\psi_k + \overline{\omega}_k\right)\cos\vartheta_k + c u_{\beta,k}, \\
\psi_{k+1} &= d\left(\psi_k + \overline{\omega}_k\right) - \overline{\omega}_{k+1} + e\left(i_{\beta,k}\cos\vartheta_k - i_{\alpha,k}\sin\vartheta_k\right), \\
\vartheta_{k+1} &= \vartheta_k + \left(\psi_k + \overline{\omega}_k\right)\Delta k, \\
\overline{\omega}_{k+1} &= \overline{\omega}_k.
\end{aligned}$$

Současně se nám ale ztráta v každém časovém kroku k změní na

$$l(x_k, u_k) = \psi_k^2 + r(u_{\alpha,k}^2 + u_{\beta,k}^2) = \psi_k^T Q \psi_k + u_k^T R u_k.$$

LQG řízení

Nyní můžeme na matice popisující systém

$$\begin{aligned}
A_k &= \frac{d}{dx_k} g(x_k, u_k) \\
&= \begin{pmatrix}
a & 0 & b\sin\vartheta_k & b\left(\psi_k + \overline{\omega}_k\right)\cos\vartheta_k & b\sin\vartheta_k \\
0 & a & -b\cos\vartheta_k & b\left(\psi_k + \overline{\omega}_k\right)\sin\vartheta_k & -b\cos\vartheta_k \\
-e\sin\vartheta_k & e\cos\vartheta_k & d & -e\left(i_{\alpha,k}\cos\vartheta_k + i_{\beta,k}\sin\vartheta_k\right) & (d-1) \\
0 & 0 & \Delta k & 1 & \Delta k \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix},
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
B_k = \frac{d}{du_k} g(x_k, u_k) &= \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
C_k = \frac{d}{dx_k} h(x_k) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
Q &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
R &= \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

aplikovat rovnice pro rozšířený Kalmanův filtr a LQ regulátor. Přičemž konkrétní hodnoty počátečních hodnot a parametrů budou specifikovány v kapitole 4.

Ještě je třeba zmínit, že pro nalezení řízení synchronního motoru není využito *LQG* návrhu přesně tak, jak byl popsán v kapitole 2, ale algoritmus je zde drobně vylepšen pomocí takzvaného „ubíhajícího horizontu“ (v anglické literatuře označováno jako „receding horizon“). Princip spočívá v tom, že řízení není předpočteno pro celý časový horizont, pro který jej navrhujeme, ale vypočteme jej pouze pro pevně stanovený pomocný časový horizont. Tento pomocný horizont pak v každém časovém kroku posouváme po původní celkové časové ose tak, aby pomocný horizont začínal vždy v časovém kroku k celkové časové osy, pro který chceme navrhnout řízení.

4 Výsledky

4.1 Metodika zpracování a získávání výsledků

Pro testované systémy viz kapitola 3, byly jednotlivé algoritmy implementovány jako funkce programu *Matlab*. Vstupními hodnotami byla nastavení jednotlivých počátečních podmínek a parametrů pro výpočet. Jednotlivé algoritmy pak byly volány ze skriptu programu *Matlab* se stejným nastavením hodnot. Návratovými hodnotami jednotlivých funkcí reprezentujících algoritmy pak byla dosažená hodnota ztráty a posloupnost reprezentující diskrétní trajektorii systému ve stavovém prostoru. Hodnota ztráty J_{alg} byla pro účely porovnání algoritmů formulována stejně, jako součet kvadrátů odchylek výstupu od požadované hodnoty, tedy

$$J_{alg} = \sum_{k=0}^{K-1} \left(y_{k+1} - r_{k+1}\right)^2 .$$

Při porovnávání jednotlivých algoritmů nebyly samozřejmě uvažovány výsledky jednoho běhu výpočtu, ale provedlo se běhů více a následně byla pro výsledky vypočtena jejich střední hodnota.

4.1.1 Funkce pro jednoduchý systém

Všechny konkrétní funkce programu *Matlab* reprezentující jednotlivé algoritmy mají stejnou strukturu. Na počátku dostanou jako své vstupní hodnoty parametry:

y_0 počáteční hodnota proměnné y, tedy hodnota y_k v čase $k = 1$;

y_r požadovaná hodnota y, referenční signál;

$\hat{b}$ střední hodnota neznámého parametru b;

P variance neznámého parametru b;

σ^2 variance šumu;

K časový horizont, pro který navrhujeme řízení;

N počet vzorkových trajektorií pro simulaci.

Následně proběhne výpočet řízení na základě konkrétního algoritmu, zpravidla podle rovnic a vzorců popsaných v části 3.1. Dále je provedena simulace běhu systému s použitím řízení získaného v předchozím kroku. V průběhu této simulace je vypočítána

hodnota dosažené ztráty a posloupnost odpovídající trajektorie systému. Tyto veličiny charakterizující použití daného algoritmu na jednoduchý systém jsou na závěr vráceny jako návratové hodnoty funkce.

4.1.2 Testovací schémata jednoduchého systému

Pro porovnání jednotlivých algoritmů stačí zadat do skriptu konkrétní hodnoty parametrů, které budou pro jednotlivá schémata uvedena dále.

Jednotlivé algoritmy z části 3.1 budou v následujícím textu označeny po řadě zkratkami:

CE	triviální CE regulátor;
sLQ	jednoduchá verze LQ regulátoru;
LQ	druhá verze LQG řízení s odhadem parametru b;
iLQG	řízení iLQG;
iLDP	algoritmus iterativního lokálního dynamického programování.

4.2 Výsledky algoritmů pro jednoduchý systém

4.2.1 Různá počáteční nastavení

Volba počátečních nastavení, tedy parametrů skriptu pro volání funkcí, byla v jednotlivých testovacích schématech následující:

Počáteční hodnota a referenční signál byly voleny jako

$$\begin{aligned} y_0 &= 0, \\ y_r &= 1. \end{aligned}$$

Z důvodu linearity úlohy je možné je libovolně posunout a přeškálovat, není tedy uvažováno testování pro jiné hodnoty. Variance šumu σ^2 je volena pomocí odchylky

$$\sigma = 0,1.$$

Pro metodu *iLDP* je pak parametr okolí položen $\rho = 0,5$, není-li uvedeno jinak. Časový horizont pro výpočty je $K = 5$, což se jeví dostatečným pro dosažení požadované hodnoty. Dále je v testovacích schématech použit počet vzorkových trajektorií $N = 100$.

Středem našeho zájmu je volba střední hodnoty a variance neznámého parametru b. Zejména volbou variance P určujeme míru neznalosti parametru a tedy i nutnost užití duální metody. Bude-li P velmi malé, skutečná hodnota b se přiblíží střední hodnotě $\hat{b}$ a dobré řízení nám poskytnou i neduální metody založené na předpokladu, že $b = \hat{b}$. S rostoucí variancí P se však začnou vyskytovat realizace, kdy se skutečná hodnota b výrazně odlišuje od střední hodnoty $\hat{b}$, a právě tam neduální metody dosáhnou příliš

velké ztráty, nebo úplně selžou v úkolu řízení. Z tohoto důvodu byly testovány všechny kombinace pro volby parametrů

$$\begin{aligned} \hat{b} &= 0;\ 1;\ 10; \\ P &= 0,01;\ 0,1;\ 1;\ 10. \end{aligned}$$

4.2.2 Výsledky porovnání algoritmů

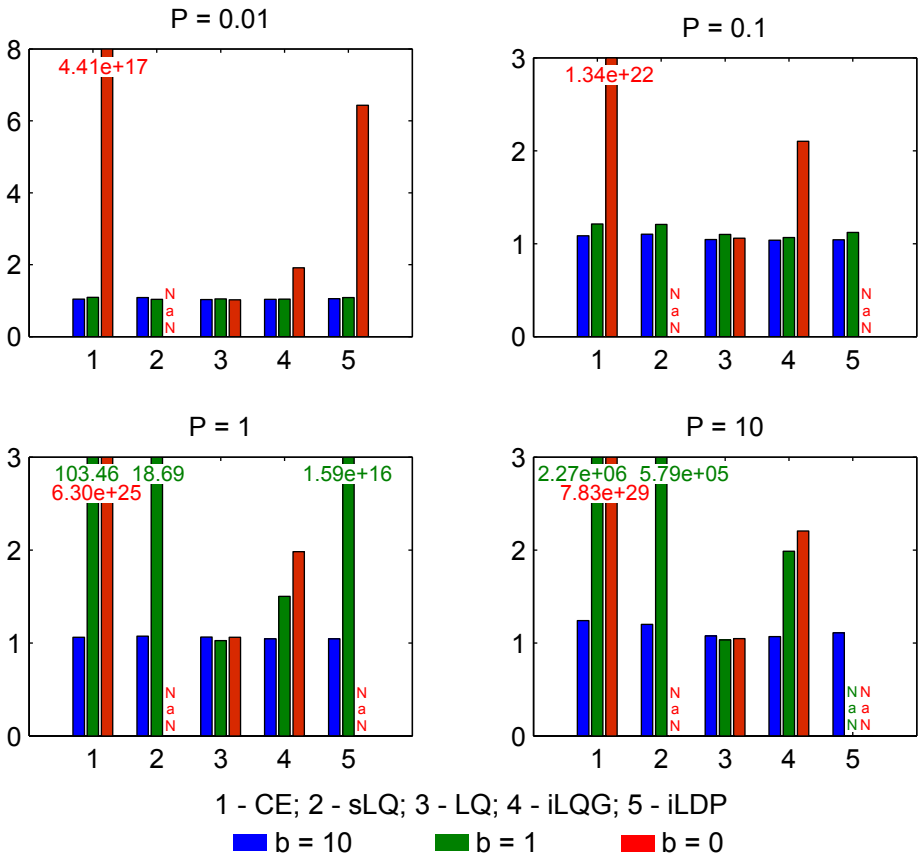
Nyní porovnáme výsledky jednotlivých algoritmů, a to hlavně podle dosažené hodnoty průměrné ztráty. Průměrná ztráta pro každý algoritmus je počítáma jako aritmetický průměr N ztrát J_{alg} dosažených pro každou z N vzorkových simulačních trajektorií. Tento postup, založený na průměrné ztrátě, je volen především z důvodu omezení vlivu šumu, který se pro každou konkrétní realizaci může nagenerovat jinak, více či méně „příznivě“ pro daný algoritmus. Pro srovnání je minimální ztráta, které algoritmus může dosáhnout, rovna 1. Je to způsobeno tím, že počáteční nastavení v prvním časovém kroku je voleno jako počáteční podmínka $y_1 = 0$, přičemž ale požadovaná hodnota $y_r = 1$. Ideální řízení může dosáhnout požadované hodnoty nejdříve v čase 2, a tedy vždy bude ztráta nejméně 1. Dále je třeba uvažovat chybu v důsledku šumu, který se generuje náhodně. Řízení se s ním ale vypořádává až následně, tedy nelze chybě v důsledku šumu předcházet a je ji nutno zahrnout do uvažování o minimální možné ztrátě. Naopak, pro srovnání, když uvažujeme nulové řízení na celém časovém horizontu, hodnota y_k se drží přibližně, až na odchylky v důsledku šumu, na nulové hodnotě. Tento stav můžeme zřejmě označit za nesplnění našeho cíle řízení, protože veličina y_k zůstává konstantně na nule, i když se chceme dostat na $y_r = 1$. Přitom ztráta dosažená v tomto negativním případě je na zvoleném časovém horizontu rovna $J = 5$.

Při porovnávání výsledků pro všechny volby parametrů $\hat{b}$ a P je postupováno s rostoucí variancí, od nejnižšího P až k P nejvyššímu, tedy ve směru růstu potřeby duálního přístupu.

Volba variance $P = 0,01$

Při porovnání průměrných ztrát pro $\hat{b} = 10$ a $\hat{b} = 1$ v grafu Obrázek 4.1, kde je volena malá variance $P = 0,01$, je vidět, že i neduální metody poskytují dobré řízení. Rozdíly ztrát jsou téměř zanedbatelné, a která metoda dosáhla nepatrně vyšší nebo nižší ztráty je ovlivněno prakticky jen konkrétní realizací šumu.

Velký problém však nastává při volbě $\hat{b} = 0$, tedy střední hodnota neznámého parametru b je nulová a jeho variance je velmi malá. Z tohoto důvodu je naprostá většina skutečných realizací parametru b velmi blízko nule, a právě to způsobuje některým algoritmům značné problémy. Jedná se zejména o algoritmus *sLQ*, jehož řešení a následně i ztráta jsou nedefinovány („NaN“ v grafu je z anglického Not-a-Number; tuto hodnotu produkuje program *Matlab* při nedefinované operaci, nejčastěji typu $0 \cdot \infty$). Dále značně velké ztráty dosahuje algoritmus *CE*. Jak bylo zmíněno v části 3.1.3, tato metoda má problematické chování, když se skutečná hodnota b blíží k 0. Částečně tento problém řeší přidání pomocného parametru ε, avšak ztráta stále dosahuje velmi vysokých hodnot a algoritmus se v tomto případě jeví nepoužitelným.



Obrázek 4.1: Dosažené ztráty algoritmů pro jednotlivé volby variance P (na osách y je hodnota dosažené ztráty, na osách x představují čísla $1-5$ jednotlivé algoritmy, barevně jsou odlišeny hodnoty dle volby střední hodnoty $\hat{b}$ – v legendě označena jen b)

Vyšší hodnoty průměrné ztráty dosahuje i algoritmus *iLDP*, který v implementaci použité v této práci vykazuje obecně špatné chování v blízkosti nulové hodnoty pro neznámý parametr b. Tento problém bude ještě podrobněji rozebrán v diskuzi k této metodě.

Volba variance $P = 0,1$

Dosažené průměrné ztráty na grafu Obrázek 4.1 pro vyšší hodnotu variance $P = 0,1$ jsou pro střední hodnoty $\hat{b} = 10$ a $\hat{b} = 1$ opět přibližně stejné u všech algoritmů. Je zde ale již patrný vliv větší variance, kdy nejjednodušší algoritmy *CE* a *sLQ* dosahují průměrné ztráty nepatrně vyšší.

V případě střední hodnoty neznámého parametru rovné $\hat{b} = 0$ selhává řízení *sLQ* stejně jako pro varianci $P = 0,01$. Podobně ztráta dosažená metodou *CE* je ještě o několik řádů vyšší než v předchozím případě. Nejznatelnější zhoršení je však na straně algoritmu *iLDP*, který pro $\hat{b} = 0$ vůbec nenalezne řešení. Dokonce ani v jednom z testovacích spuštění skriptu pro uvažované hodnoty nedoběhl algoritmus *iLDP* do konce a vždy zhavaroval v průběhu výpočtu, zpravidla kvůli počítání s hodnotami *NaN*.

Volba variance $P = 1$

Graf Obrázek 4.1 zobrazuje hodnoty dosažených průměrných ztrát pro hodnotu variance $P = 1$. Při volbě střední hodnoty $\hat{b} = 10$ jsou průměrné ztráty velmi nízké a poměrně vyrovnané.

Střední hodnota $\hat{b} = 1$ již může být pro některé algoritmy problematická, protože současně je variance volena jako $P = 1$, a tedy značně narůstá pravděpodobnost konkrétní realizace parametru b, jehož skutečná hodnota bude velmi blízko nuly. Právě to se nejvýrazněji projevuje u algoritmů *CE*, *sLQ* a *iLDP*.

Volba $\hat{b} = 0$ pak dává prakticky stejné výsledky jako předchozí případ pro $P = 0,1$, kdy metoda *CE* dosahuje nepřijatelně velké ztráty a algortimy *sLQ* a *iLDP* vůbec nenaleznou řešení.

Volba variance $P = 10$

Pro relativně velkou hodnotu variance $P = 10$ jsou průměrné dosažené ztráty jednotlivých algoritmů zachyceny na grafu Obrázek 4.1. Při střední hodnotě $\hat{b} = 10$ je dosaženo nízkých a vyrovnaných hodnot ztráty.

Volba $\hat{b} = 1$ je opět problematická pro metody *CE* a *sLQ* a algoritmus *iLDP* v tomto případě vůbec nenalezne řešení. Jako jediné použitelné se v tomto případě jeví algoritmy *LQ* a *iLQG*.

Problematická volba střední hodnoty $\hat{b} = 0$ pak dává výsledky analogické předchozím dvěma volbám variance $P = 1$ a $P = 0,1$, tedy algoritmy *sLQ* a *iLDP* nenalézají řešení a *CE* dosahuje extrémní průměrné ztráty.

4.2.3 Chování jednotlivých algoritmů

Oproti porovnání ztrát algoritmů mezi sebou, v této části porovnáme průměrné ztráty každého konkrétního algorimu pro různé volby parametrů $\hat{b}$ a P. Tímto postupem získáme lepší představu, pro jaké volby parametrů je algoritmus vhodnější, méně vhodný, popřípadě nepoužitelný.

CE

Následující tabulka obsahuje hodnoty průměrných ztrát dosažených pomocí metody *CE* pro různé volby parametrů $\hat{b}$ (řádek) a P (sloupec).

$P \setminus \hat{b}$	10	1	0
0,01	1.0432	1.0909	4.4083e+17
0,1	1.0851	1.2129	1.3361e+22
1	1.0609	103.4646	6.2953e+25
10	1.2402	2.2735e+06	7.8254e+29

Z tabulky je patrno, že řízení *CE* dosahuje nízké ztráty při dostatečné znalosti neznámého parametru b, tedy při nízké varianci P, ovšem za předpokladu, že se se střední hodnotou parametru b nacházíme dostatečně daleko od nuly. Právě nulová hodnota je pro metodu *CE* kritická, což se snažíme do jisté míry kompenzovat přidáním malého parametru ε. Jak je ale vidět v posledním sloupci tabulky, pro volbu $\hat{b} = 0$ se jeví *CE* jako nepoužitelné. Dále se jedná o neduální metodu; při velké varianci, a tedy neznalosti o skutečné hodnotě parametru b, dosahujeme velké ztráty.

sLQ

$P \setminus \hat{b}$	10	1	0
0,01	1.0485	1.0325	NaN
0,1	1.0635	1.2078	NaN
1	1.0729	18.6880	NaN
10	1.1987	5.7873e+05	NaN

Pro algortimus *sLQ* je z tabulky průměrných ztrát zřejmé, že algoritmus zcela selhává pro střední hodnotu $\hat{b} = 0$ a v tomto případě vůbec nenalézá řízení. Pro střední hodnoty $\hat{b} = 1$ a $\hat{b} = 10$, které jsou dostatečně daleko od nuly, již metoda nalézá ve většině případů použitelné řízení a ztráta je pak vyrovnaná, zejména při konkrétní volbě $\hat{b} = 10$. V důsledku neduálnosti algoritmu se však projevuje nárůst variance zvýšením průměrné ztráty. Při volbě $\hat{b} = 1$ je ztráta již příliš vysoká pro variance $P = 1$ a $P = 10$ a řízení dosahuje nepřijatelně velké ztráty.

LQ

$P \setminus \hat{b}$	10	1	0
0,01	1.0323	1.0461	1.0237
0,1	1.0447	1.0994	1.0592
1	1.0626	1.0252	1.0622
10	1.0762	1.0329	1.0472

Algoritmus LQ se jeví jako nejlepší ze zde testovaných algoritmů. A to ve srovnání s ostatními, ale i jak je patrno z tabulky průměrných ztrát. Dosažená hodnota průměrné ztráty je velmi nízká, a to pro všechny případy volby parametrů $\hat{b}$ a P. Uvažujeme samozřejmě verzi LQ řízení pro upravený systém, kdy je zahrnut do stavových proměnných i odhad skutečného parametru b v podobě jeho střední hodnoty a variance jako postačující statistiky. Protože algoritmus nalézá dobré řízení i při vyšší neznalosti a určuje skutečnou hodnotu parametru b, jedná se o duální přístup. To můžeme pozorovat při volbě $\hat{b} = 0$, kdy neduální přístupy selhávají kvůli předpokladu $b = \hat{b} = 0$, ale duální metoda dokáže odhadnout skutečnou nenulovou hodnotu b a nalézt řízení. LQ je však na rozdíl od složitějších algoritmů řešen pouze linearizací v každém časovém kroku, ale bez aproximací a numerických výpočtů.

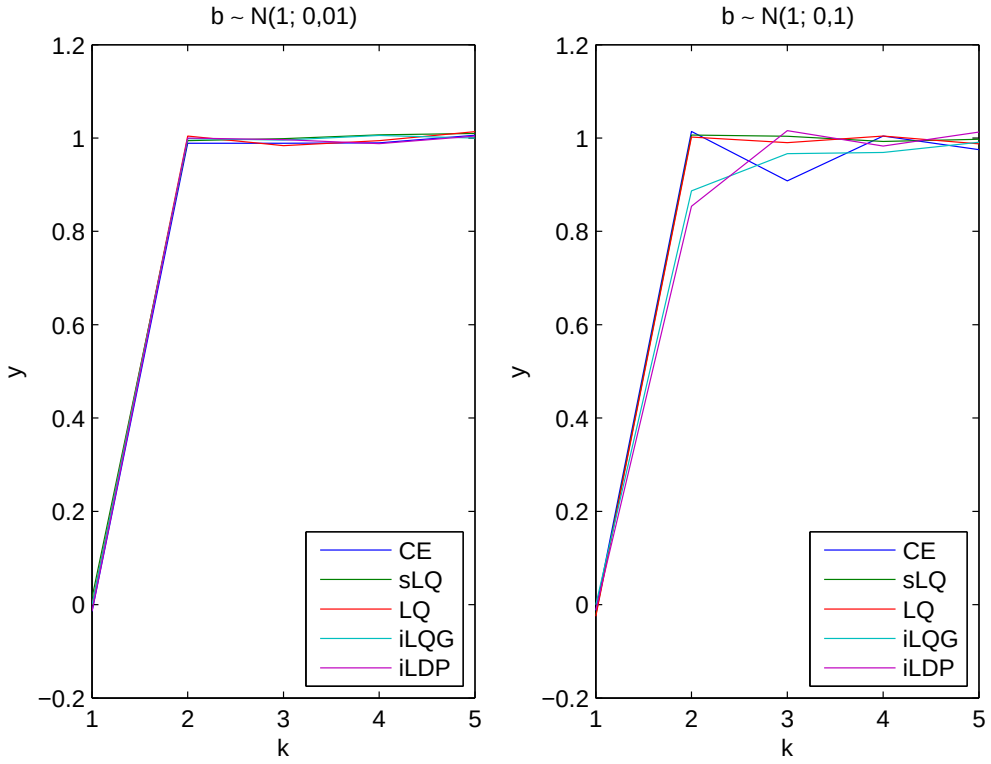
iLQG

$P \setminus \hat{b}$	10	1	0
0,01	1.0374	1.0418	1.9138
0,1	1.0372	1.0663	2.1010
1	1.0445	1.5009	2.2043
10	1.0691	1.9873	2.2035

Ztráty dosažené aplikací $iLQG$ na jednoduchý systém, jak je vidět v tabulce, jsou celkově relativně nízké. Problematičtější chování vykazuje metoda při volbě střední hodnoty $\hat{b} = 0$, kdy se ztráta pro všechny volby variance P pohybuje okolo 2. I když hodnota ztráty v tomto případě není ideální, nemusí to však přímo znamenat nedosažení požadované hodnoty. Chování výstupní trajektorie je patrné z uvedených grafů v části 4.2.4. Pro $\hat{b} = 1$ začne ztráta znatelně růst až při volbě variance $P = 1$ a více, tedy když se začnou vyskytovat realizace skutečného parametru b blízko problematické nuly. Střední hodnota $\hat{b} = 10$ pak není problematická pro žádnou hodnotu P. Obdobně jako pro případ algoritmu LQ můžeme na základě výsledků označit $iLQG$ za duální algoritmus.

iLDP

$P \setminus \hat{b}$	10	1	0
0,01	1.0571	1.0820	6.4312
0,1	1.0423	1.1202	NaN
1	1.0432	1.5862e+016	NaN
10	1.1097	NaN	NaN



Obrázek 4.2: Porovnání průběhu hodnoty y pro jednotlivé algoritmy

Algoritmus *iLDP* se vyznačuje problematickým chováním, jak už bylo uvedeno v porovnání s ostatními metodami, pro skutečnou hodnotu neznámého parametru b blízko nuly. V tabulce průměrných ztrát můžeme vypozorovat, že ztráta je příliš vysoká právě v případě, kdy je střední hodnota $\hat{b} = 0$, a dále je-li $\hat{b} = 1$ a současně je variance $P = 1$ nebo $P = 10$, tedy je vyšší pravděpodobnost výskytu realizací skutečné hodnoty b blízkých nule. V ostatních případech dosahuje řízení získané pomocí algoritmu *iLDP* relativně nízké průměrné ztráty.

4.2.4 Průběh skutečné hodnoty

Pro ilustraci vývoje hodnoty veličiny y, kterou chceme řídit z y_0 na požadovanou hodnotu y_r, jsou v této části uvedeny příklady grafů průběhů y pro jednotlivé algoritmy.

- Na grafech Obrázek 4.2 je možné porovnat průběhy y jako řešení jednotlivých algoritmů. V obou případech je volena střední hodnota $\hat{b} = 1$ a variance je na prvním grafu $P = 0,01$ a na druhém $P = 0,1$. Je možno pozorovat, jak s rostoucí variancí poskytují některé algoritmy horší výsledek.

- Grafy Obrázek 4.3 (CE) zobrazují průběhy hodnot y při užití řízení CE. Je volena

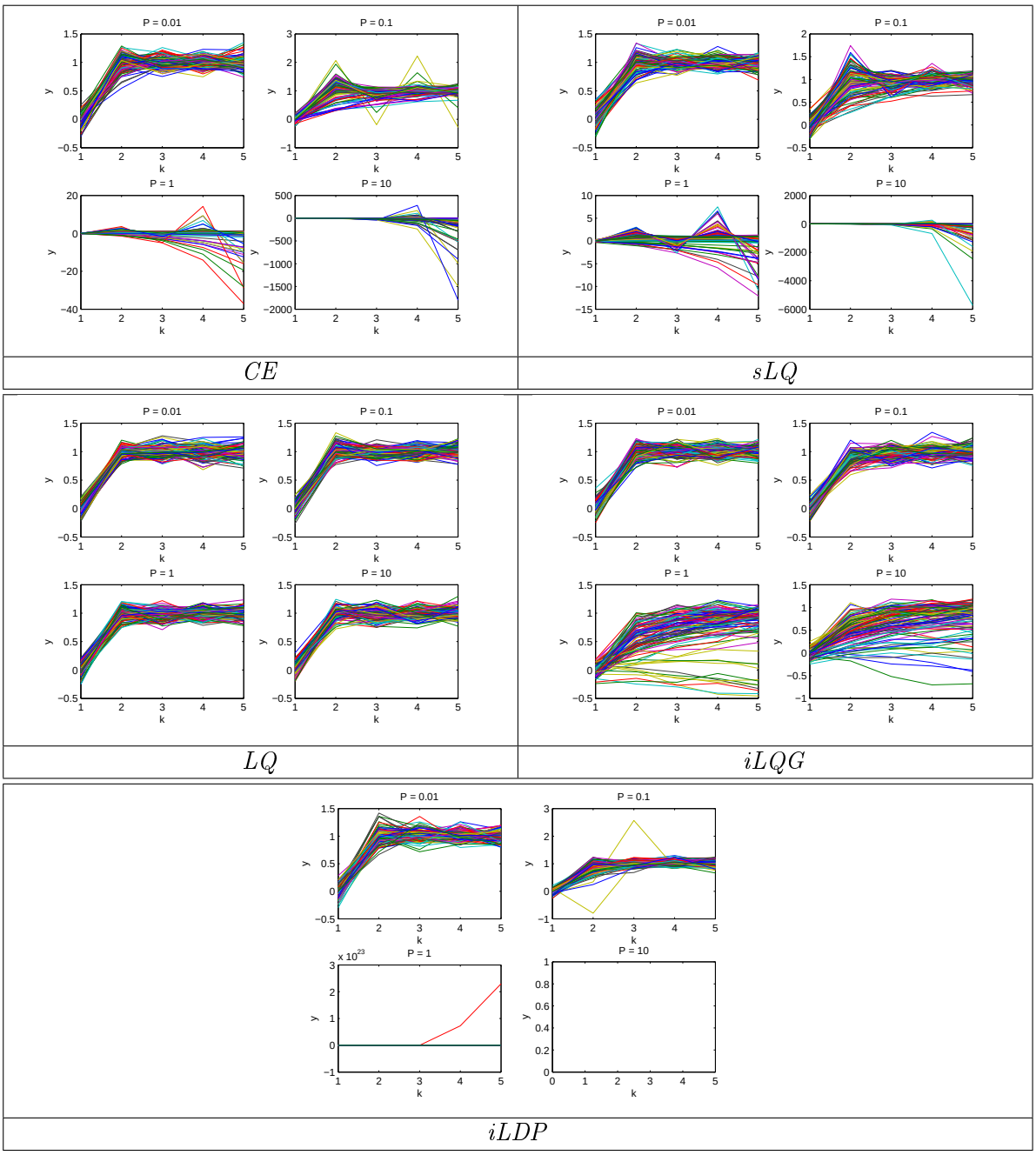
střední hodnota $\hat{b} = 1$ a postupně všechny testované variance P. Každá z barevných čar pak reprezentuje jednu vzorkovou trajektorii, kterých bylo celkem 100. Šum způsobuje, že každá z generovaných trajektorií má trochu jiný průběh, a tedy všechny nesplývají v jednu, ale tvoří jakousi „trubici“. To je nejvíce patrné zejména pro volbu variance $P = 0,01$. Průměrováním této „trubice“ je pak získávána průměrná trajektorie použitá například v grafu Obrázek 4.2. Při vyšších variancích P se pak již projevuje i vliv chyby v důsledku neznalosti skutečné hodnoty parametru b, protože jej předpokládáme rovný jeho střední hodnotě. Pro $P = 0,1$ lze pozorovat, že některé trajektorie, jedná se o ty, kdy je skutečná hodnota b blízko střední hodnotě $\hat{b}$, mají požadovaný průběh. Naopak lze zřetelně odlišit případy, kdy došlo k nepříznivé realizaci b. V těchto případech y vůbec nedosahuje požadované hodnoty y_r a naopak kolem ní osciluje. Při volbě ještě větších variancí pak narůstá četnost trajektorií, které místo přiblížení požadované hodnotě dokonce divergují.

- Průběhy y při volbě $\hat{b} = 1$ s sLQ řízením jsou zobrazeny na grafech Obrázek 4.3 (sLQ). Význam jednotlivých barevných čar je v tomto i následujících bodech analogický jako v předchozím bodě. Podobně je možno pozorovat růst počtu „nevyhovujících“ trajektorií y s růstem variance P.

- Při LQ řízení, s průběhy y na grafech Obrázek 4.3 (LQ), je dosaženo dobrých výsledků, kdy y již od času 2 sleduje požadovanou hotnotu y_r. Samozřejmě je zde nutno přihlédnout k chybě v důsledku šumu, tedy jednotlivé vzorkové trajektorie opět tvoří „trubici“ okolo požadované hodnoty.

- Grafy Obrázek 4.3 ($iLQG$) zobrazují trajektorie y pro $iLQG$ řízení. Zde je zajímavé, že narozdíl od případů pro CE a sLQ řízení, kdy docházelo k oscilacím a divergujícím trajektoriím, v tomto případě dochází spíše k odchýlení trajektorie od požadovaného průběhu. První dvě řízení totiž nejsou duální a užíváme principu „certainty equivalence“. Tedy algoritmy navrhnou řídící zákrok, ten je ale vzhledem k chybnému předpokladu o hodnotě parametu b špatný a y nabude jiné hodnoty, než jsme zamýšleli. V dalším kroku se snažíme vrátit, ale řídící zákrok je opět špatný. Následně může dojít k oscilacím nebo dokonce k divergenci. Chyby jsou zde způsobeny velkým rozdílem skutečné hodnoty parametu b od jeho střední hodnoty, se kterou počítáme. Naproti tomu v případě duálního algoritmu $iLQG$ odhadujeme neznámý parametr b a chyby jsou zde v důsledku nepřesných výpočtů a následné linearizace vůči špatné trajektorii. Zejména při skutečné hodnotě b blízko nuly. Delší čas potřebný pro dosažení požadované hodnoty může však být způsoben tím, že řídící strategie je navrhována pouze jednou (v rámci iterace), pro celý časový horizont. Zlepšení, tedy rychlejší dosažení požadované hodnoty, by mohlo být využití *ubíhajícího horizontu* (receding horizon) podobně jako pro LQG řízení synchronního motoru.

- Na závěr grafy průběhů y pro algoritmus $iLDP$ jsou na Obrázku 4.3 ($iLDP$). Pro tento algoritmus je problematická skutečná hodnota parametru $b = 0$. A protože algoritmus využívá výpočtů na vzorkových trajektoriích reprezentujících okolí,



Obrázek 4.3: Průběhy hodnot y při volbě $\hat{b} = 1$ pro jednotlivé algoritmy

dokonce i jedna z trajektorií, která se výrazným způsobem odchýlí od ostatních, a tedy od očekávaného průběhu y, může narušit výsledek, nebo dokonce samotný běh algoritmu. To je možno pozorovat pro volbu $P = 1$, kdy y výrazně diverguje od požadované hodnoty y_r. A dále v případě $P = 10$ algoritmus vůbec nedokončí výpočet.

4.3 Výsledky pro synchronní motor

V této části jsou uvedeny výsledky pro úlohu nalezení řízení synchronního motoru s permanentními magnety. Funkční řízení se však podařilo nalézt pouze pomocí algoritmu LQG. Použitelnou implementaci algoritmu $iLDP$ se nepodařilo vytvořit, tento problém bude rozebrán v diskuzi (část 4.4), a tedy budou uvedeny výsledky pouze pro metodu LQG.

4.3.1 Specifikace parametrů a konstant

Pro výpočet řízení modelu synchronního motoru s permanentními magnety byly v části 3.2 uvedeny příslušné rovnice. Následně byly odvozeny detaily konkrétní implementace pro použité algoritmy. Pro získání výsledků a ověření použitelnosti řízení je však ještě třeba specifikovat konkrétní hodnoty jednotlivých konstant a parametrů.

Konstanty v rovnicích motoru

Pro účely testování algoritmů volíme konstanty následovně:

$$\begin{aligned} R_s &= 0,28; \\ L_s &= 0,003465; \\ \Psi_{PM} &= 0,1989; \\ B &= 0; \\ T_L &= 0; \\ k_p &= 1,5; \\ p_p &= 4,0; \\ J &= 0,04; \\ \Delta k &= 0,000125. \end{aligned}$$

Což vede na zjednodušené koeficienty:

$$\begin{aligned} a &= 0,9898; \\ b &= 0,0072; \\ c &= 0,0361; \\ d &= 1; \\ e &= 0,0149. \end{aligned}$$

Kovarianční matice

Kovarianční matice M_k a N_k předpokládáme známé a pro účely testování je volíme následovně:

$$\begin{aligned} M_k &= \operatorname{diag}(0,0013;\ 0,0013;\ 5\mathrm{e}-6;\ 1\mathrm{e}-10)\,, \\ N_k &= \operatorname{diag}(0,0006;\ 0,0006)\,. \end{aligned}$$

Omezení na vstupy

Na vstupy u_k klademe omezení $u_\alpha^2 + u_\beta^2 \leq u_{max}^2$, kde volíme

$$u_{max} = 100.$$

Ztrátová funkce

Do ztrátové funkce je třeba zvolit jediný parametr, a to prvek r na diagonále matice R. Tento parametr odpovídá penalizaci za vstupy, ale vstupy chceme upravit pouze tak, aby splňovaly výše uvedenou podmínku. Je tedy třeba parametr r experimentálně naladit. Jako vhodná volba se na základě experimentů jeví hodnota

$$r = 0,000001.$$

Časový horizont a vzorky

Časový horizont je volen $K = 20$ a vzorkových trajektorií je podobně jako v předchozím případě jednoduchého systému zvoleno $N = 100$.

Požadovaná hodnota

Jako hodnotu požadovaných otáček volíme

$$\overline{\omega} = 1,15.$$

Uvážíme-li relativně malou periodu vzorkování Δk, tato hodnota se jeví jako dosažitelnou z počáteční hodnoty ω_0 při použitém časovém horizontu K.

Počáteční podmínky

Poslední, co je třeba zvolit, jsou počáteční podmínky pro testovaný systém. Ty samozřejmě neznáme přesně. Nemůžeme totiž měřit stav, zejména polohu a otáčky hřídele. Abychom mohli testovat chování algoritmu při rostoucí potřebě duálního přístupu, podobně jako pro jednoduchý systém budeme volit stejné střední hodnoty, ale postupně rostoucí varianci. To se bude týkat variance polohy hřídele, to jest úhlu natočení. Volíme tedy

počáteční střední hodnoty:

$$\begin{aligned}\hat{i}_{\alpha,0} &= 0,\\ \hat{i}_{\beta,0} &= 0,\\ \hat{\omega}_0 &= 1,\\ \hat{\vartheta}_0 &= \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

A počáteční variance variance postupně:

$$\begin{aligned}P_0 &= \mathrm{diag}\,(0,01;\ 0,01;\ 0,01;\ 0,01)\,,\\ P_0 &= \mathrm{diag}\,(0,01;\ 0,01;\ 0,01;\ 0,1)\,,\\ P_0 &= \mathrm{diag}\,(0,01;\ 0,01;\ 0,01;\ 1)\,,\\ P_0 &= \mathrm{diag}\,(0,01;\ 0,01;\ 0,01;\ 10)\,.\end{aligned}$$

4.3.2 Pozorované výsledky

Algoritmus LQG implementovaný pro účely nalezení řízení synchronního motoru v této práci je sice navržen tak, aby dobře zvládal šum (pomocí rozšířeného Kalmanova filtru), ale nejedná se o duální metodu. Tedy s rostoucí variancí neznámých hodnot stavu, zejména polohy hřídele motoru, kterou sledujeme, poskytuje algoritmus horší řízení a dosahuje tedy i vyšší ztráty. O tom se můžeme přesvědčit v tabulce průměrných ztrát sestavené na základě simulací.

Simulace byly provedeny analogickým postupem jako pro jednoduchý systém, kdy průměrná ztráta je střední hodnotou ze ztrát dosažených pro každou z N vzorkových trajektorií s různou náhodnou realizací počátečních podmínek a šumu. Ztráta pro jednotlivou vzorkovou trajektorii je opět počítána pouze na základě odchylky od požadované hodnoty, tedy jako

$$J = \sum_{k=0}^{K-1} (\omega_{k+1} - \overline{\omega}_{k+1})^2 = \sum_{k=0}^{K-1} \psi_{k+1}^2.$$

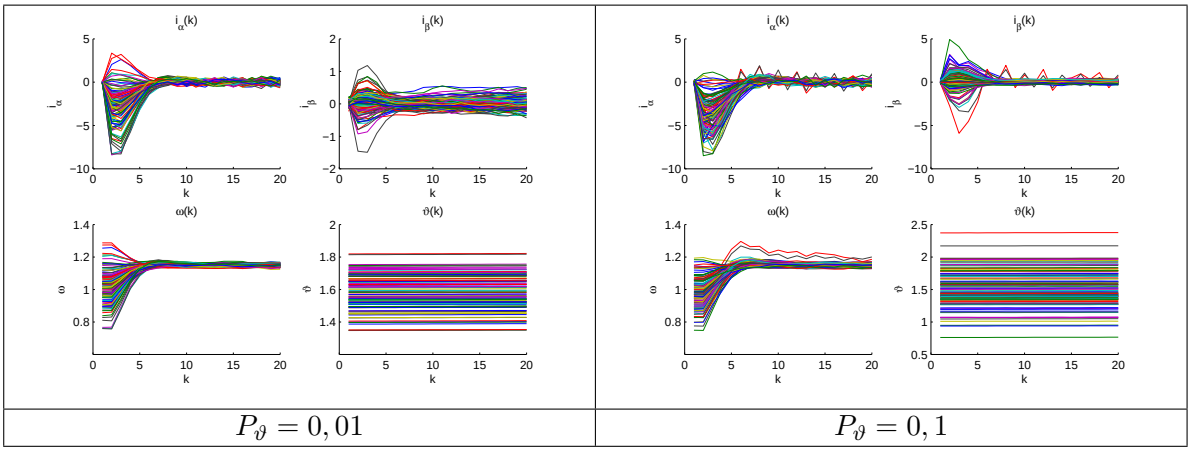
Dále označíme $P_\vartheta = P_0^{(4,4)}$, tedy právě počáteční varianci polohy hřídele, kterou budeme měnit a v závislosti na této změně pozorovat dosažené ztráty. Pak jsou dosažené průměrné ztráty $\overline{J}$ pomocí algoritmu LQG následující:

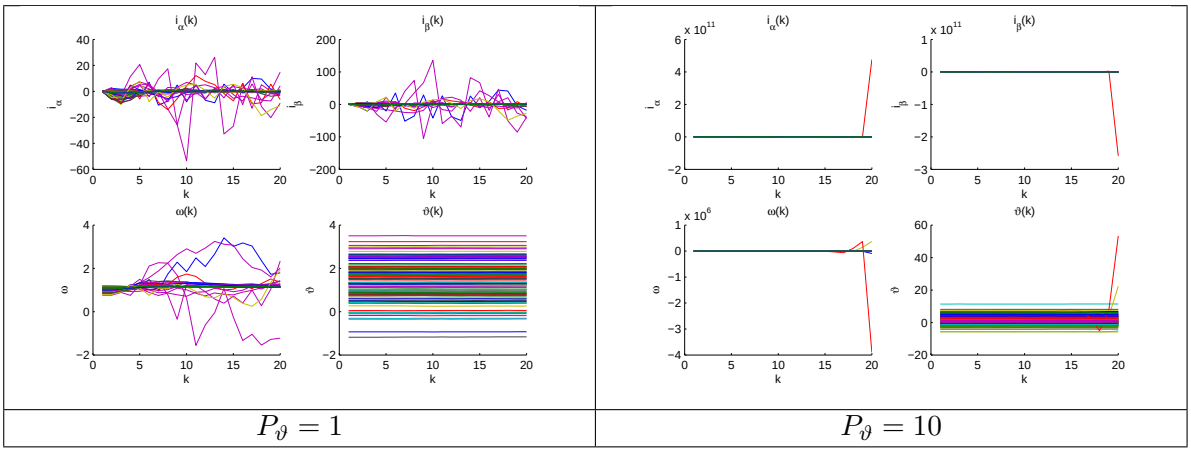
Tabulka průměrných ztrát

P_ϑ	0,01	0,1	1	10
$\overline{J}$	0,0776	0,1074	3,3982	NaN

Průběhy stavových veličin

Ještě lépe je možno pozorovat výsledky algoritmu při rostoucí varianci na grafech průběhů stavových veličin systému. Podobně jako pro jednoduchý systém jsou zde různými barvami zobrazeny jednotlivé vzorkové trajektorie, které tvoří „trubici“ v důsledku šumu.





Obrázek 4.4: Průběhy hodnot stavových veličin dle volby P_ϑ

Protože je algoritmus LQG neduální, s rostoucí variancí poskytuje špatné řízení, a to zpravidla v těch případech, kdy skutečné hodnoty polohy hřídele ϑ jsou vzdáleny střední hodnotě, se kterou počítáme. Jednotlivé průběhy jsou zachyceny v grafech Obrázek 4.4 pro volby variance $P_\vartheta = 0,01$, $P_\vartheta = 0,1$, $P_\vartheta = 1$ a $P_\vartheta = 10$.

4.4 Diskuze

Nyní srovnáme dosažené výsledky pro jednotlivé algoritmy a budeme diskutovat jejich přednosti, nedostatky a použitelnost pro řešení konkrétních úloh. Pro úlohu nalezení řízení synchronního motoru s permanentními magnety byly implementovány dva algoritmy. Konkrétně se jednalo o algoritmy $iLDP$ a LQG, přičemž je třeba podotknout, že funkční implementaci $iLDP$ se nepodařilo vytvořit. K dispozici je pro tuto úlohu pouze jeden algoritmus, který nalezne řízení, a srovnání tedy není možné. Z tohoto důvodu budou tedy jednotlivé algoritmy srovnány pouze na základě výsledků pro jednoduchý systém. Algoritmus $iLDP$, na který je zaměřena tato práce, bude diskutován v samostatné části.

4.4.1 Porovnání algoritmů

Algoritmy jsou porovnány na základě výsledků simulací pro jednoduchý systém. Jedná se o integrátor s neznámým ziskem, tedy lineární a časově invariantní systém. Systém je však na mezi stability, což může být příčinou problémů některých algoritmů. Další problém může nastat, když by hodnota neznámého parametru b byla nulová. Z rovnice jednoduchého systému

$$y_{k+1} = y_k + bu_k + \sigma e_k,$$

pak plyne, že neexistuje žádné řízení u_k, které by dosáhlo změny stavu y_k na požadovanou hodnotu (není-li již tato hodnota triviálně dosažena). Přičemž neznámý parametr b považujeme za náhodnou veličinu s normálním rozdělením, a tedy neuvažujeme-li degenerované rozdělení, je pravděpodobnost dosažení přesné hodnoty $b = 0$ nulová. Degenerované rozdělení ale dostáváme, když považujeme hodnotu b za známou například použitím principu „certainty equivalence“, kdy předpokládáme hodnotu parametu rovnou jeho střední hodnotě. Je-li současně střední hodnota rovna nule, nastává kritický případ, kdy řízení založeno na tomto předpokladu musí selhat.

CE

Řízení *CE* je nejjednodušší metodou použitou v této práci. Využíváme předpokladu, že skutečnou hodnotu neznámého parametru b známe, a tedy ji pokládáme rovnu jeho střední hodnotě Eb. Je-li ale skutečná hodnota neznámého parametru b příliš vzdálená od střední hodnoty, se kterou počítáme, řízení samozřejmě selhává. Tento přístup tedy není duální, a jak bylo možno pozorovat na výsledcích simulací, s rostoucí variancí P parametru b dosahuje větší ztráty.

Dalším problémem tohoto přístupu je volba střední hodnoty 0, kdy zřejmě z tvaru rovnice regulátoru hrozí dělení nulou. Přičtením malého parametru ε sice můžeme problém dělení nulou odstranit, ale použitelné řízení nezískáme. Potřebovali bychom tedy přičíst větší hodnotu ε, což ale způsobí nepřesnost při střední hodnotě Eb dále od nuly. Ideální by tedy bylo vždy „naladit“ parametr ε podle konkrétní volby střední hodnoty Eb, což ale velmi snižuje univerzálnost metody. Dalším možným způsobem je místo malého parametu ε přičítat varianci P. Na základě tohoto postupu byl pak vytvořen návrh aproximace regulátoru pro algoritmus *iLDP*. Zdokonalování návrhu řízení *CE* však nebylo předmětné v této práci, protože záměrem bylo využít *CE* jako nejjednoduššího neduálního přístupu pro srovnání s ostatními „dokonalejšími“ algoritmy.

Návrh řízení *CE* tedy můžeme stručně zhodnotit tak, že je sice velmi jednoduchý, ale neduální, a vykazuje značně problematické chování pro střední hodnotu E$b = 0$.

sLQ

Označení *sLQ* bylo použito pro klasické LQ řízení aplikované na základní verzi jednoduchého systému bez dodatečných úprav. Protože je ale skutečná hodnota parametru b v rovnicích neznámá a není nijak odhadována algoritmem, využívá se zde principu „certainty equivalence“ a předpokládáme, že skutečná hodnota parametru b je rovna jeho střední hodnotě Eb.

LQ řízení je primárně navrženo pro řízení lineárních systémů s kvadratickou ztrátovou funkcí. Tomuto zadání základní verze jednoduchého systému plně vyhovuje. Řízení je pak hledáno ve tvaru lineární funkce, kde řízení je lineární funkcí stavu.

Již z tvaru rovnice základní verze jednoduchého systému je zřejmé, že předpokládáme-li parametr b rovný střední hodnotě $\mathrm{E}b = 0$, úloha nemá smysl, protože libovolné řízení u_k nemůže dosáhnout změny stavu. V tomto případě řízení sLQ nelze použít, jak je také vidět v tabulce průměrných ztrát.

Je třeba uvést, že se nejedná o duální metodu, a tedy s rostoucí variancí neznámého parametru dosahujeme vyšší ztráty. Dosažené výsledky jsou pak podobné jako u *CE*. Kromě případu $\mathrm{E}b = 0$, kdy sLQ zcela selhává, je však dosaženo nepatrně nižší průměrné ztráty.

LQ

Přístupem LQ je označena verze lineárně-kvadratického řízení, aplikovaného na upravené rovnice jednoduchého systému. Upravená verze rovnic již odhaduje neznámý parametr b pomocí odhadů jeho střední hodnoty $\hat{b}$ a variance P, kdy se tyto dva parametry spolu se stavem y_k vyvíjejí v čase. Získané rovnice pak již nejsou lineární, linearizujeme je tedy v každém časovém kroku a následně aplikujeme výpočet klasického LQ řízení. Na základě výsledků simulací usuzujeme, že se jedná o duální algoritmus.

Na rozdíl od složitějších algoritmů nevyužívá LQ, kromě linearizace, žádné další nepřesné přístupy, jako aproximace nebo výpočty na vzorkových trajektoriích. To se v simulacích ukazuje velmi výhodným, kdy algoritmus LQ dosahuje ve srovnání s ostatními přístupy nejlepších výsledků a dosahuje nízké ztráty ve všech případech volby parametrů.

iLQG

Algoritmus $iLQG$ je rozšířením základního LQG řízení a je určen i pro složitější systémy. Lze jej aplikovat i na nelineární systémy s nekvadratickou ztrátovou funkcí v důsledku požadavku na omezení vstupů. V této práci je $iLQG$ použit jako mezikrok mezi jednodušším přístupem LQ a složitějším algoritmem $iLDP$. Na základě výsledků simulací opěd soudíme, že $iLQG$ je duálním algoritmem.

Základní postup využívaný $iLQG$ je nejprve linearizace a pak vyjádření vztahů pomocí matic, které mohou být ještě dále upravovány z důvodu například omezení vstupů nebo zajištění regularity. Dále je třeba zmínit, že se v podstatě jedná o lokální metodu, protože linearizace je prováděna vzhledem k reprezentativní trajektorii a následně se pak počítá v odchylkách od této trajektorie. Reprezentativní trajektorii můžeme získat například simulací bezšumového vývoje systému nebo průměrováním dostatečného počtu vzorkových trajektorií. Algoritmus $iLQG$ pak aplikujeme na upravenou verzi rovnic jednoduchého systému, podobně jako v případě LQ.

Jak je možné přesvědčit se v tabulce průměrných ztrát, $iLQG$ dosahuje velmi dobrých výsledků (to jest nízké ztráty), je-li zajištěn nízký výskyt realizací skutečné hodnoty b blízko nuly. Konkrétně se jedná o případ volby $\hat{b} = 10$ a libovolného P, nebo $\hat{b} = 1$ a současně $P = 0,01$ popřípadě $P = 0,1$. V opačném případě, pro $\hat{b} = 0$, nebo $\hat{b} = 1$ a

současně $P = 1$ nebo $P = 10$, je dosaženo vyšší průměrné ztráty (okolo hodnoty 2). Z grafů průběhu pro *iLQG* je pak zřejmé, že v těchto negativních případech mají některé trajektorie dobrý průběh a některé naopak špatný. To je ovšem z hlediska řízení nepřijatelné, aby regulátor někdy poskytl dobré řízení a někdy naopak téměř nepoužitelné.

S velkou pravděpodobností je tento problém opět způsoben problematickým chováním algoritmu *iLQG* v okolí nuly. Výpočet řízení je totiž při použití tohoto algoritmu značně závislý na volbě reprezentativní trajektorie, kterou když vygenerujeme špatně, dostaneme i špatné řízení. Právě v blízkosti nuly může dojít k nepříznivému generování reprezentativní trajektorie. Vycházíme z $y_0 = 0$, a tedy při kladném parametru b generujeme trajektorii do kladných hodnot, nebo se naopak dostáváme do záporných čísel, je-li skutečná hodnota parametru b záporná. Tento rozpor pak může způsobit problémy jako špatné řízení a dosažení vyšší ztráty.

4.4.2 Hodnocení algoritmu iLDP

Algoritmus *iterativního lokálního dynamického programování* (*iLDP*) je hlavním námětem této práce. Jeho výsledky tedy popíšeme detailněji. Nejdříve uveďme výsledky v porovnání s ostatními algoritmy pro jednoduchý systém. Dále bude zařazena diskuze negativních vlastností algoritmu, které mohly vést k tomu, že se nepodařilo vytvořit funkční implementaci pro sychronní motor. Na závěr bude v samostatné části zařazeno porovnání pozorovaných vlastností *iLDP* s prvotními očekáváními.

Algoritmus *iLDP* je nejsložitější ze zde prezentovaných metod pro nalezení optimálního řízení, zejména při nutnosti duálního přístupu. Je založen na obecných principech, jmenovitě Hamilton-Jacobi-Bellmanova rovnost a Pontryaginův princip minima. Jedná se o iterační metodu, tedy takovou, která vychází od jistého počátečního řízení a to v iteracích „vylepšuje“ za účelem dosažení optima. Počáteční řízení však musíme dodat algoritmu jako apriorní informaci a špatné řízení může způsobit nutnost velkého počtu iterací k nalezení optimálního řízení nebo v extrémním případě dokonce nenalezení vhodného řízení. Dále algoritmus *iLDP* je lokální metoda a tedy výpočty probíhají na okolí nějaké reprezentativní trajektorie. Toto okolí je třeba zvolit při konkrétní implementaci algoritmu a jeho volba může mít nezanedbatelný vliv na výsledky, které následně *iLDP* poskytne. Algoritmus pak odpovídá obecnému schématu dynamického programování, kde se v diskrétních časových okamžicích napočítávají od nejvyššího času zpět optimální hodnoty Hamiltoniánů, které se postupně uchovávají v Bellmanově funkci. Z nich je také následně odvozeno i optimální řízení.

Srovnání pro jednoduchý systém

Při srovnání výsledků pro jednoduchý systém s ostatními algoritmy poskytuje *iLDP* dobré řízení ve všech případech, kdy se skutečné realizace neznámého parametru b vyskytují dostatečně daleko od nuly. Tento bod je právě pro algoritmus *iLDP* kritický a výpočet řízení tam zpravidla selhává. Tedy pro volby $\hat{b} = 10$ a současně $P = 0,01$, $P = 0,1$ a $P = 1$, dále pak pro $\hat{b} = 1$ a současně $P = 0,01$ dosahuje *iLDP* velmi nízké průměrné ztráty. Nízké průměrné ztráty dosahuje pak ještě pro volbu $\hat{b} = 10$ a současně $P = 10$

a $\hat{b} = 1$ a současně $P = 0,1$. Je-li parametr $\hat{b} = 1$, pak při $P = 1$ je dosaženo extrémní hodnoty ztráty a při $P = 10$ algoritmus dokonce vůbec nenalezne řešení. Podobně pro $\hat{b} = 0$ při volbě $P = 0,01$ je dosaženo nepřijatelné průměrné ztráty a pro ostatní volby P již vůbec nenalézáme řešení.

Tedy ve srovnání s ostatními algoritmy poskytuje *iLDP* sice výsledky, které patří mezi nejlepší, ale pouze za předpokladu, že je zaručeno realizování skutečných hodnot b dostatečně daleko od nuly. Při srovnávání konkrétních hodnot průměrných ztrát je třeba mít na vědomí, že se hodnoty mohou nepatrně lišit v závislosti na realizaci šumu.

Diskuze negativních vlastností algoritmu

V průběhu implementace a testování *iLDP* se objevily jisté komplikace a projevily se negativní vlastnosti tohoto algoritmu. Jedná se zejména o problematické chování při realizaci skutečné hodnoty neznámého parametru b blízko nuly pro jednoduchý systém. Dalším problémem je pak otázka vhodné volby aproximací funkcí pro synchronní motor.

Problematické chování při b blízko nuly

Nejprve se tedy zaměřme na obtíže týkající se jednoduchého systému. Jedním z důvodů, proč systém vykazuje problematické chování pro b blízko hodnoty 0, by mohla být volba aproximace regulátoru. Ten je totiž volen jako

$$\pi(k, x) = \frac{r_{k+1} - K_1 y_k}{K_2 \hat{b}_k + K_3 P_k + K_4}.$$

Algoritmus *iLDP* je duální a odhaduje skutečnou hodnotu neznámého parametru b pomocí jeho střední hodnoty $\hat{b}$ a variance P. Za předpokladu, že by odhadování proběhlo dobře a efektivně, odhad $\hat{b}$ se bude blížit skutečné hodnotě b, která je ovšem blízko u nuly. Další vlastností předpokládaného dobrého odhadu je, že si jím budeme téměř jisti, a tedy variance P se bude také blížit nule. A vyhodnotil-li algoritmus v předchozí iteraci koeficient K_4 jako nepodstatný pro tvar funkce regulátoru, to jest K_4 je opět téměř nulový, dostáváme ve jmenovateli velmi malé číslo, téměř nulové. Funkce regulátoru π pak vrací i pro malou odchylku y od požadované hodnoty (například v důsledku šumu) velký řídící zásah. To je ale principiálně dobře, protože při b blízko 0 musíme volit extrémně vysoké řídící zásahy, a to téměř blížící se nekonečnu. Na druhou stranu si je ale třeba uvědomit, že uvažovaná funkce regulátoru je pouze aproximací, a tedy se dopouští jisté chyby. Tato chyba samozřejmě pak při velkém řídícím zásahu také narůstá. Dalším problémem je, že výpočty jsou prováděny na počítači, ten je při výpočtech s malými čísly blízko nuly nebo naopak s velkými čísly značně nepřesný.

Možností, jak se vyhnout tomuto problému, by bylo volit jiný tvar funkce regulátoru, otázkou by pak ale bylo, jaký. Zvolený tvar regulátoru má totiž několik výhod. Za prvé koeficienty K_i je možno určit metodou nejmenších čtverců, a tedy jejich výpočet z množiny dvojic $\{x^{(n)}, u^{(n)}\}$ je poměrně jednoduchý. Další výhodou je, že obecný tvar funkce regulátoru vznikl na základě vyjádření řízení u z rovnice jednoduchého systému při požadavku dosažení požadované hodnoty v jednom časovém kroku. Získaná funkce by pak měla relativně dobře aproximovat skutečné optimální řízení.

Druhým z možných důvodů problematického chování u nuly je lokalita metody. Výpočty jsou totiž prováděny na okolí tvořeném množinou reprezentativních trajektorií. Generujeme-li reprezentativní trajektorie pro parametr b blízko nuly, s velkou pravděpodobností dojde k tomu, že část trajektorií se vygeneruje s předpokladem kladného b a část předpokládající b záporné. Ovšem pro malé, téměř nulové hodnoty parametru b je optimální řídící zásah, jak už bylo zmíněno, extrémně vysoký a v závislosti na tom, je-li předpokládáno b kladné nebo záporné, mění se odpovídajícím způsobem i znaménka řídících zásahů. Jako shrnutí popsané situace dostáváme část reprezentativních trajektorií navrhující extrémně vysoký kladný řídící zásah a pak druhou část navrhující naopak extrémně vysoký záporný řídící zásah. Zřejmě z takovýchto dat nelze získat použitelnou a už vůbec ne správnou hodnotu optimálního řízení.

Vyhnout se výše popsanému problému by bylo možno pouze jinou volbou okolí. Narážíme zde ale opět na obtíže, jak jiné okolí zvolit, abychom se vyhli výše popsanému problému.

Protože ale spolu obě navržené možnosti způsobující problematické chování při b blízko 0 do určité míry souvisí, je pravděpodobný i vliv kombinace obou dvou.

Obtíže s volbou aproximací

Již byla diskutována problematika volby aproximace okolí a aproximace funkce řízení. Problémy byly popsány pro konkrétní případ jednoduchého systému. Další aproximací, kterou je třeba volit, je aproximace Bellmanovy funkce. Jedná se o skalární funkci více proměnných, která v sobě zachycuje v podstatě celou dynamiku a vývoj systému. Je zpravidla velmi složitá, ale pro potřeby algoritmu se ji snažíme aproximovat lineární kombinací zvolených základních funkcí. Má-li být tato aproximace dostatečně jednoduchá pro výpočty jejích hodnot, ale i koeficientů, může být velmi nepřesnou aproximací skutečné Bellmanovy funkce.

Protože Bellmanova funkce je základní částí algoritmu *iLDP*, chyby, kterých se dopustíme její aproximací, se následně přenášejí prakticky do všech ostatních částí algoritmu.

Na druhou stranu se ale chyby v důsledku aproximace dopustíme velmi snadno. Bellmanova funkce může být totiž u složitějších systémů značně komplikovaná na to, aby ji bylo možno aproximovat lineární kombinací základních funkcí. Dalším problémem je pak počet těchto funkcí. Ten s rostoucí dimenzí stavového prostoru rychle narůstá a následně je třeba zajistit dostatek dat v podobě vzorkových trajektorií pro vypočtení jejich koeficientů.

Volba vhodné aproximace Bellmanovy funkce se tedy jeví jako nejkomplikovanější z dílčích problémů ponechaných autory algoritmu *iLDP* k dořešení při konkrétní implementaci. V článku [7] je sice poskytnut návod volby aproximace ve tvaru lineární kombinace základních funkcí, ale tato volba nemusí být vždy správná. Kdybychom si chtěli udělat představu o průběhu skutečné Bellmanovy funkce, abychom mohli snadněji určit vhodnou aproximaci, narážíme na problém, že Bellmanovu funkci máme zadanou pomocí Hamilto-Jacobi-Bellmanovy rovnosti.

Shrnutí výše zmiňovaných problémů nám tedy dává následující závěr: Svoboda ve výběru aproximací nám poskytuje značnou volnost a činí algoritmus univerzálním. Na

druhou stranu je ale značně omezující, zejména když se nám nepodaří vhodnou aproximaci nalézt.

4.4.3 Konfrontace s prvotními očekáváními

Nyní porovnáme dosažené výsledky algoritmu iLDP s prvotními očekáváními uvedenými v části 2.2.5. Vždy je uvedeno nejdříve prvotní očekávání a následně je komentováno, zda bylo potvrzeno:

Výhody

- duální metoda (lépe se vypořádá s neznalostí oproti neduálním metodám)
  - toto očekávání bylo potvrzeno, iLDP dosahuje lepších výsledků než neduální metody, což je patrné při rostoucí neznalosti
  - je však třeba podotknout, že musíme mít zajištěnu dostatečnou vzdálenost od kritických bodů pro iLDP, kde pak samozřejmě algoritmus selhává
- lepší zvládnutí šumu
  - zvládání šumu lze z provedených simulací těžko posoudit, ovšem lze předpokládat, že iLDP zvládne šum lépe než metody, které přítomnost šumu vůbec neuvažují
- rychlejší dosažení požadované hodnoty
  - na rychlost dosažení požadované hodnoty lze na základě výsledků pro jednoduchý systém těžko usuzovat, protože prakticky všechny použité metody dosahují požadované hodnoty (v příznivém případě, kdy nalézají použitelné řízení) hned v čase $k = 2$, tedy v prvním možném řiditelném kroce
  - pro složitější systém synchronního motoru, kde by bylo srovnání zřetelnější, se nepodařilo implementovat funkční verzi iLDP algoritmu
- možnost aplikace na mnoharozměrové stavové a řídící prostory
  - tuto vlastnost uvádějí sami autoři algoritmu iLDP, protože se jedná o lokální metodu, je možné vyhnout se problémům globálních metod a aplikovat algoritmus i na systémy s více rozměry, zůstává zde však problém volby aproximací, který je pak třeba řešit a který se ukazuje jako netriviální
- univerzálnost (vychází z obecných principů) a svoboda výběru konkrétních aproximací a minimalizací
  - algoritmus je zřejmě značně univerzální, protože umožňuje zvolit mnoho detailů až při konkrétní implementaci
  - naopak se tato vlastnost v mnoha případech ukazuje být na škodu a dokonce může být i jednou z největších slabin algoritmu iLDP, jelikož nám základní popis algoritmu neříká, jak konkrétní detaily volit

Nevýhody

- vyšší časová náročnost
  - vyšší časová náročnost byla potvrzena v průběhu simulací pro potřeby této práce
  - ve srovnání s ostatními přístupy, které řeší danou úlohu vesměs analyticky a jsou založeny hlavně na maticových operacích, algoritmus iLDP používá aproximací, numerické minimalizace a výpočtů na vzorkových trajektoriích, a tedy výpočetní čas je řádově několikrát delší než pro ostatní metody (konkrétní příklad je výpočet N vzorkových trajektorií pro vytvoření průběhů y pro jednoduchý systém, který trval pro iLDP o tři řády déle než pro všechny ostatní algoritmy)
- numerické výpočty (minimalizace)
  - pro numerickou minimalizaci je jednak nutno zvolit vhodné minimalizační algoritmy (v implementacích v této práci byly použity funkce programu *Matlab* `fminunc` a `fmincon` pro neomezenou a omezenou minimalizaci), dále numerická minimalizace hledá zpravidla jen lokální minima, je náročnější na výpočetní čas a je méně přesná, a to zejména při výpočtech na aproximovaných funkcích, kde i malá odchylka od správného průběhu původní funkce může dát špatný výsledek velmi vzdálený od správné hodnoty
- nepřesnost v důsledku aproximace klíčových funkcí v algoritmu a problémy s jejich volbou
  - algoritmus iLDP pracuje s aproximacemi funkcí řízení a dále s aproximací Bellmanovy funkce, na které je postaven prakticky celý algoritmus; v důsledku toho se chyby způsobené použitím aproximace přenášejí prakticky do všech ostatních výpočtů v algoritmu
  - dalším problémem je pak samotná volba aproximací, která již byla diskutována výše
- implementační složitost
  - z jednoho pohledu je implementace algoritmu iLDP jednoduchá, protože je popsán jednoduchou osnovou složenou pouze ze čtyř bodů
  - naopak je ale třeba vyřešit mnoho dílčích detailů, například vytvořit aproximace funkcí a najít vhodnou reprezentaci okolí pro výpočet; samotná implementace se tedy může velmi zkomplikovat a dokonce se nemusí ani podařit vytvoření funkční verze algoritmu
- lokálnost metody a tedy i nalezeného řešení
  - jak již bylo zmíněno, iLDP hledá optimální řízení v okolí nějaké reprezentativní trajektorie, a tedy zpravidla není zajištěna optimalita nalezeného řízení v celém stavovém a řídícím prostoru

- volba okolí (lokální metoda)
  - při implementaci iLDP je třeba zvolit konkrétní reprezentaci okolí
  - v používaných implementacích je volena jednoduchá možnost, kdy je okolí reprezentováno množinou vzorkových trajektorií, na které jsou pak prováděny další výpočty

Závěr

V kapitole 1 této práce je stručně popsána základní teorie duálního řízení a další teoretické poznatky potřebné k popisu konkrétních algoritmů pro nalezení optimálního řízení. V další kapitole následuje přiblížení jednotlivých algoritmů použitých pro srovnání s ústředním algoritmem této práce: *iterativním lokálním dynamickým programováním* (*iLDP*). Jemu je pak věnována druhá polovina kapitoly 2.

Algoritmus *iLDP* byl implementován pro jednoduchý systém. Pro tento systém byly následně implementovány i další algoritmy pro srovnání. Implementace *iLDP* pro složitější systém, synchronní motor s permanentními magnety, se nezdařila z důvodu obtíží při volbě aproximací. Nepodařilo se nalézt takové aproximace zpětnovazebního řízení a Bellmanovy funkce, aby na jejich základě algoritmus *iLDP* nalezl použitelné řízení. Pro složitější systém byl však implementován algoritmus *LQG*, který nalézá funkční řízení. Jedná se ale o neduální metodu, a tedy s rostoucí neznalostí selhává. Konkrétní popisy testovaných systémů a úpravy jejich rovnic pro potřeby jednotlivých algoritmů lze nalézt v kapitole 3.

Kapitola 4 obsahuje získané výsledky na základě simulací. Algoritmus *iLDP* je porovnán s ostatními testovanými algoritmy podle dosažených výsledků pro jednoduchý systém. Dále jsou uvedeny výsledky pro složitější systém získané pomocí *LQG*. Na závěr jsou diskutovány problémy týkající se algoritmu *iLDP*, které vedly v jistých případech k problematickému chovaní u jednoduchého systému. Následuje diskuze obtíží implementace *iLDP* pro složitější systém. Nakonec jsou v bodech porovnány skutečné výsledky získané ze simulací a v průběhu implementace s prvotními očekáváními týkajícími se algoritmu *iLDP*.

Algoritmus *iLDP* byl v této práci otestován i na jiných problémech, než pro které byl vyvinut svými autory. Dále byly objeveny některé kladné, ale hlavně i záporné stránky týkající se jeho implementace a použitelnosti na konkrétní úlohy. V závěrečné kapitole práce byly výsledky dosažené pomocí *iLDP* srovnány s výsledky dosaženými užitím principu separace, tedy pomocí řízení *LQG*. Pro jednoduchý systém bylo provedeno srovnání i s dalšími metodami návrhu řízení. Naopak pro složitější systém jsou k dispozici pouze výsledky získané pomocí *LQG*.

Výsledky je možno shrnout tak, že *iLDP* je řádově několikrát náročnější na výpočetní čas, ale při větší neznalosti dosahuje lepších výsledků. Je ovšem třeba zajistit, aby se nerealizovaly problematické hodnoty pro tento algoritmus. Naproti tomu *LQG* je rychlejší, ale s rostoucí neznalostí dosahuje špatných výsledků nebo dokonce selhává. Co se týče algoritmu *iLDP*, je třeba ještě zmínit problém týkající se volby aproximací, který se ukazuje být největší slabinou této metody.

Literatura

[1] Aström K. J.; Helmersson A.: Dual control of an integrator with unknown gain. *Computers and Mathematics with Applications*, 1986: s. 12A, 653–662.

[2] Bertsekas D. P.: *Dynamic Programming and Optimal Control*, ročník I. Belmont, Massachusetts: Athena Scientific, třetí vydání, 2005.

[3] Melichar J.: Lineární systémy 1: Učební texty. [online], 2010, [cit. 2010-04-03] Dostupné z: <http://www.kky.zcu.cz/uploads/courses/ls1/LS1-Ucebni-texty-2010.pdf>.

[4] Nagy I.; Pavelková L.; Suzdaleva E.; aj.: *Bayesian decision making: Theory and examples*. Prague: ÚTIA AVČR, 2005.

[5] Štecha J.: *Teorie dynamických systémů: transparenty a přednášky*. Praha: ČVUT, Elektrotechnická fakulta, 2003, ISBN 80-01-02744-9.

[6] Thompson A. M.; Cluett W. R.: Stochastic iterative dynamic programming: a Monte Carlo approach to dual control. *Automatica*, 2005: s. 41:767–778.

[7] Todorov E.; Tassa Y.: Iterative local dynamic programming. *Proceedings of the 2nd IEEE Symposium on Adaptive Dynamic Programming and Reinforcement Learning*, 2009: s. 90–95.

[8] Todorov E.; Weiwei L.: A generalized iterative LQG method for locally-optimal feedback control of constrained nonlinear stochastic systems. *In proceedings of the American Control Conference*, 2005.

[9] Virius M.: *Základy algoritmizace*. Praha: ČVUT, Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská, 2008, ISBN 978-80-01-04003-4.