PMSM rovnice

March 14, 2011

Odvození rovnic do dq soustavy

Rovnici pro napětí v obvodu statoru synchroního stroje lze zapsat jako

$$u_s = R_s i_s + u_i,$$

tedy součet napětí v obvodu (Ohmův zákon) a indukovaného napětí, přičemž veličiny jsou uvažovány komplexní. Vyjáříme-li indukované napětí, jako změnu toku v čase (Faradayův zákon elektromagnetické indukce) přejde rovnice na tvar

$$u_s = R_s i_s + \frac{d\psi_s}{dt}.$$

Pro přechod do rotujícího souřadného systému předpokládáme obecně rotaci o úhel ε, kterou provedeme vynásobením všech veličin operátorem rotace v komplexních číslech $e^{j\varepsilon}$, kde j značí komplexní jednotku. Tedy

$$\begin{aligned} u_s e^{j\varepsilon} &= R_s i_s e^{j\varepsilon} + \frac{d(\psi_s e^{j\varepsilon})}{dt}, \\ u_s e^{j\varepsilon} &= R_s i_s e^{j\varepsilon} + \frac{d\psi_s}{dt} e^{j\varepsilon} + \psi_s j\omega_\varepsilon e^{j\varepsilon}, \\ u_s &= R_s i_s + \frac{d\psi_s}{dt} + \psi_s j\omega_\varepsilon, \end{aligned}$$

kde symbol ω_ε označuje úhlovou rychlost – změnu úhlu ε, jedná se tedy o derivaci $\omega_\varepsilon = \frac{d\varepsilon}{dt}$. Tato úhlová rychlost ω_ε odpovídá elektrickým otáčkám ω_{el} a lze ji přepočíst na mechanické otáčky pomocí vztahu $\omega_{el} = p_p\omega_m$, kde p_p je počet párů polů rotoru a ω_m mechanické otáčky. Když pro jednoduchost předpokládáme počet párů polů roven 1, je $\omega_e = \omega_m$.

Nyní můžeme přejít k rovnicím v souřadném systému dq, který je natočen oproti souřadnému systému statoru $(\alpha\beta)$ o úhel $\varepsilon = \vartheta$ a otáčí se rychlostí ω_m. Osa magnetického toku rotoru je osou d a v tomto směru uvažujeme reálnou složku komplexních veličin, osa q je pak na ní kolmá a bude reprezentovat složku imaginární. Dostáváme tedy

$$u_d + ju_q = R_s\left(i_d + ji_q\right) + \frac{d\left(\psi_d + j\psi_q\right)}{dt} + \left(\psi_d + j\psi_q\right) j\omega_m,$$

což při rozepsání po složkách (reálná a imaginární) vede na rovnice

$$\begin{aligned}
u_d &= R_s i_d + \frac{d\psi_d}{dt} - \omega_m \psi_q, \\
u_q &= R_s i_q + \frac{d\psi_q}{dt} + \omega_m \psi_d.
\end{aligned}$$

Dále uvažujme vztahy pro magnetické toky

$$\begin{aligned}
\psi_d &= L_d i_d + \psi_{pm}, \\
\psi_q &= L_q i_q.
\end{aligned}$$

Po dosazení získáme rovnice

$$\begin{aligned}
u_d &= R_s i_d + L_d \frac{di_d}{dt} - \omega_m L_q i_q, \\
u_q &= R_s i_q + L_q \frac{di_q}{dt} + \omega_m L_d i_d + \omega_m \psi_{pm}.
\end{aligned}$$

Vydělením L_s respektive L_q získáme

$$\begin{aligned}
\frac{di_d}{dt} &= -\frac{R_s}{L_d} i_d + \frac{L_q}{L_d}\omega_m i_q + \frac{1}{L_d} u_d, \\
\frac{di_q}{dt} &= -\frac{R_s}{L_q} - \frac{\psi_{pm}}{L_q}\omega_m - \frac{L_d}{L_q}\omega_m i_d + \frac{1}{L_q} u_q.
\end{aligned}$$

Když ale položíme $L_d = L_q = L_s$ dostaneme rovnice

$$\begin{aligned}
u_d &= R_s i_d + L_s \frac{di_d}{dt} - \omega_m L_s i_q, \\
u_q &= R_s i_q + L_s \frac{di_q}{dt} + \omega_m L_s i_d + \omega_m \psi_{pm}.
\end{aligned}$$

Vydělení L_s pak vede na tvar

$$\begin{aligned}
\frac{di_d}{dt} &= -\frac{R_s}{L_s} i_d + \omega_m i_q + \frac{u_d}{L_s}, \\
\frac{di_q}{dt} &= -\frac{R_s}{L_s} i_q - \frac{\psi_{pm}}{L_s}\omega_m - \omega_m i_d + \frac{u_q}{L_s}.
\end{aligned}$$

Toto vyjádření je shodné s tím, které dostaneme následně.

Odvození rovnic do $\alpha\beta$ soustavy

Opět vyjdeme z rovnice

$$u_s = R_s i_s + \frac{d\psi_s}{dt}.$$

Magnetický tok ψ_s vyjádříme jako tok vytvořený cívkami statoru a dále přičteme tok permanentních magnetů, je však třeba uvažovat, že rotor obsahující permanentní magnety je natočen obecně pod úhlem ϑ. Tedy v komplexní rovině lze vyjádřit tok jako

$$\psi_s = L_s i_s + \psi_{pm} e^{j\vartheta}.$$

Dosadíme nyní do rovnice a rozepíšeme ji po složkách

$$\begin{aligned} u_s &= R_s i_s + \frac{d\left(L_s i_s + \psi_{pm} e^{j\vartheta}\right)}{dt}, \\ u_\alpha + j u_\beta &= R_s\left(i_\alpha + j i_\beta\right) + \frac{d}{dt}\left(L_s\left(i_\alpha + j i_\beta\right) + \psi_{pm}\left(\cos\vartheta + j\sin\vartheta\right)\right). \end{aligned}$$

Rozepsaní na dvě rovnice je pak následující

$$\begin{aligned} u_\alpha &= R_s i_\alpha + L_s \frac{di_\alpha}{dt} - \frac{d\vartheta}{dt}\psi_{pm}\sin\vartheta, \\ u_\beta &= R_s i_\beta + L_s \frac{di_\beta}{dt} + \frac{d\vartheta}{dt}\psi_{pm}\cos\vartheta. \end{aligned}$$

Vydělíme-li rovnice indukčností L_s, vyjádříme z nich derivace proudů a derivace úhlu natočení označíme jako $\frac{d\vartheta}{dt}=\omega$ úhlovou rychlost dostaneme následující rovnice v souřadné soustavě $\alpha\beta$:

$$\begin{aligned} \frac{di_\alpha}{dt} &= -\frac{R_s}{L_s} i_\alpha + \frac{\psi_{pm}}{L_s}\omega\sin\vartheta + \frac{u_\alpha}{L_s}, \\ \frac{di_\beta}{dt} &= -\frac{R_s}{L_s} i_\beta - \frac{\psi_{pm}}{L_s}\omega\cos\vartheta + \frac{u_\beta}{L_s}. \end{aligned}$$

Nyní je ještě třeba přidat další dvě diferenciální rovnice pro otáčky ω a polohu ϑ. Rovnice pro ϑ je triviální a už byla užita, jedná se o

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \omega.$$

Rovnice pro ω získáme následovně ze základních zákonů mechaniky: Pro točivý moment (speciální případ momentu síly pro silovou dvojici, kdy se vektory skládají na nulu, avšak mají točivý účinek, v anglické literatuře označeno jako *torque*) platí obecně vztah

$$\tau = \frac{dL}{dt},$$

kde L označuje moment hybnosti (*angular momentum*). Při uvažování působení více točivých momentu momentů pak

$$\tau_1 + \ldots + \tau_n = \sum \tau = \frac{dL}{dt}.$$

Uvažujeme-li rotaci kolem pevné osy, lze moment hybnosti vyjádřit jako

$$L = J\omega_m,$$

kde J označuje moment setrvačnosti (*moment of inertia*) a ω_m je mechanická úhlová rychlost. Po dosazení tedy

$$\sum \tau = \frac{dL}{dt} = \frac{d(J\omega_m)}{dt} = J\frac{d\omega_m}{dt}.$$

Točivé momenty $\sum \tau$ jsou:

- moment získaný konverzním procesem elektrické energie, který vyjadřuje hlavní vlastnost točivého stroje, a to právě převod elektrické energie na mechanickou, tento mement označíme jako T_e
- zátěžný moment reprezentující zatížení stroje, tedy v podstatě to, co motor pohání, je však třeba uvažovat, že působí v opačném směru a stroj brzdí, označíme ho tedy $-T_L$
- dále je ještě třeba uvažovat ztráty ve stroji v důsledku tření, tento moment opět působí v opačném směru a uvažujeme jej lineárně závislý na otáčkách ω_m, tedy $-B\omega_m$, kde B je koeficient viskozity (tření)

Rovnice po dosazení tedy přejde na tvar

$$T_e - T_L - B\omega_m = J\frac{d\omega_m}{dt}.$$

Nyní je ještě třeba vyjádřit točívý moment T_e na základě elektrických veličin. Toho lze dosáhnout výpočtem přes okamžitý elektrický výkon, pro trojfázový systém

$$P = u_a i_a + u_b i_b + u_c i_c.$$

Po transformaci do systému $\alpha\beta$ získáme vyjádření

$$P = k_p \left(u_\alpha i_\alpha + u_\beta i_\beta \right),$$

kde k_p označuje Parkovu konstantu s hodnotou $k_p = \frac{3}{2}$. Napětí je zde uvažováno indukované $u_i = \frac{d\psi_s}{dt} = \frac{d\left(L_s i_s + \psi_{pm} e^{j\vartheta}\right)}{dt} = L_s \frac{di_s}{dt} + j\omega\psi_{pm} e^{j\vartheta}$ a z něj využijeme pouze složku bez derivace proudu, protože ta slouží k tvorbě samotného magnetického pole stroje a nepodílí se na tvorbě výkonu, tedy $\omega\psi_{pm} j(\cos\vartheta + j\sin\vartheta)$. V systému $\alpha\beta$ získáme vyjádření

$$\begin{aligned} u_\alpha &= -\omega\psi_{pm}\sin\vartheta, \\ u_\beta &= \omega\psi_{pm}\cos\vartheta, \end{aligned}$$

tedy po dosazení

$$P = k_p \left(-i_\alpha \omega\psi_{pm}\sin\vartheta + i_\beta \omega\psi_{pm}\cos\vartheta \right).$$

Moment T_e lze pak určit ze vztahu $P = \omega_m T_e$ a tedy

$$T_e = \frac{P}{\omega_m} = k_p \frac{i_\beta \omega\psi_{pm}\cos\vartheta - i_\alpha \omega\psi_{pm}\sin\vartheta}{\omega_m} = k_p p_p \psi_{pm} \left(i_\beta \cos\vartheta - i_\alpha \sin\vartheta \right),$$

kde jsme využili vztahu $\frac{\omega}{\omega_m} = p_p$.

Dosazení do rovnice pro momenty pak vede na tvar

$$k_p p_p \psi_{pm} \left(i_\beta \cos\vartheta - i_\alpha \sin\vartheta\right) - T_L - B\omega_m = J\frac{d\omega_m}{dt}.$$

Ještě je třeba upravit rovnici tak, aby v ní nevystupovaly mechanické otáčky ω_m, ale otáčky elektrické ω. Toho je možno snadno dosáhnout násobením celé rovnice p_p. Rovnici ještě vydělíme momentem setrvačnosti J a získáme tvar

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{k_p p_p^2 \psi_{pm}}{J} \left(i_\beta \cos\vartheta - i_\alpha \sin\vartheta\right) - \frac{T_L p_p}{J} - \frac{B}{J}\omega.$$

Tedy máme poslední rovnici následující soustavy:

$$\begin{aligned}
\frac{di_\alpha}{dt} &= -\frac{R_s}{L_s} i_\alpha + \frac{\psi_{pm}}{L_s}\omega \sin\vartheta + \frac{u_\alpha}{L_s} \\
\frac{di_\beta}{dt} &= -\frac{R_s}{L_s} i_\beta - \frac{\psi_{pm}}{L_s}\omega \cos\vartheta + \frac{u_\beta}{L_s} \\
\frac{d\omega}{dt} &= \frac{k_p p_p^2 \psi_{pm}}{J} \left(i_\beta \cos\vartheta - i_\alpha \sin\vartheta\right) - \frac{B}{J}\omega - \frac{p_p}{J} T_L \\
\frac{d\vartheta}{dt} &= \omega
\end{aligned}$$

Odvození rovnice pro ω v dq soustavě pro různé indukčnosti

Opět vyjdeme z analogických vztahů jako při předchozím odvození pro $\alpha\beta$, tedy

$$T_e - T_L - B\omega_m = J\frac{d\omega_m}{dt},$$

kde vyjádříme T_e ze vztahu

$$T_e = \frac{P}{\omega_m}.$$

Tedy transformujeme následující vyjádření pro výkond z $\alpha\beta$ do dq

$$\begin{aligned}
P &= k_p \left(u_\alpha i_\alpha + u_\beta i_\beta\right), \\
P &= k_p \left(\left(u_d \cos\vartheta - u_q \sin\vartheta\right)\left(i_d \cos\vartheta - i_q \sin\vartheta\right) + \left(u_q \cos\vartheta + u_d \sin\vartheta\right)\left(i_q \cos\vartheta + i_d \sin\vartheta\right)\right), \\
P &= k_p \left(u_d i_d + u_q i_q\right).
\end{aligned}$$

Opět dosadíme za u_{dq} složky indukovaného napětí bez derivace proudů

$$\begin{aligned}
u_d &= -\omega L_q i_q, \\
u_q &= \omega L_d i_d + \omega \psi_{pm}.
\end{aligned}$$

To vede na

$$\begin{aligned}
P &= k_p \left(-\omega L_q i_q i_d + \left(\omega L_d i_d + \omega\psi_{pm}\right) i_q\right), \\
P &= k_p \omega \left(i_d i_q \left(L_d - L_q\right) + \psi_{pm} i_q\right).
\end{aligned}$$

A po dosazení získáme vyjádření pro moment T_e ve tvaru

$$T_e = k_p p_p \left(i_d i_q \left(L_d - L_q \right) + \psi_{pm} i_q \right).$$

Rovnice $T_e - T_L - B\omega_m = J\frac{d\omega_m}{dt}$ pak po dosazení T_e, vydělení J a násobení p_p přejde na tvar

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{k_p p_p^2}{J} \left(\left(L_d - L_q \right) i_d i_q + \psi_{pm} i_q \right) - \frac{B}{J}\omega - \frac{p_p}{J} T_L.$$

Diskretizace

Diskretizací pomocí Eulerovy metody s časovým krokem Δt získáme následující diskrétní rovnice:

$$\begin{aligned}
i_{\alpha,t+1} &= \left(1 - \frac{R_s}{L_s}\Delta t\right) i_{\alpha,t} + \frac{\psi_{pm}}{L_s}\omega_t \sin\vartheta_t + \frac{u_{\alpha,t}}{L_s} \\
i_{\beta,t+1} &= \left(1 - \frac{R_s}{L_s}\Delta t\right) i_{\beta,t} - \frac{\psi_{pm}}{L_s}\omega_t \cos\vartheta_t + \frac{u_{\beta,t}}{L_s} \\
\omega_{t+1} &= \left(1 - \frac{B}{J}\Delta t\right) \omega_t + \frac{k_p p_p^2 \psi_{pm}}{J}\Delta t \left(i_{\beta,t}\cos\vartheta_t - i_{\alpha,t}\sin\vartheta_t \right) - \frac{p_p}{J} T_L \Delta t \\
\vartheta_{t+1} &= \vartheta_t + \omega_t \Delta t
\end{aligned}$$

Rotace do dq

Převod do rotující souřadné soustavy dq pootočené o úhel ϑ a rotojící rychlostí ω:

$$\begin{bmatrix} x_d \\ x_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_\alpha \\ x_\beta \end{bmatrix}$$

(nebo stejného efektu lze dosáhnout i použitím komplexních souřadnic a zápisem $x_{dq} = e^{j\vartheta} x_{\alpha\beta}$, jako v odvození rovnic rovnou do tvaru v dq souřadnicích)

následně tedy

$$\begin{aligned}
i_d &= i_\alpha \cos\vartheta + i_\beta \sin\vartheta \\
i_q &= i_\beta \cos\vartheta - i_\alpha \sin\vartheta
\end{aligned}$$

a analogicky pro u; naopak pro opačný směr transformace

$$\begin{aligned}
i_\alpha &= i_d \cos\vartheta - i_q \sin\vartheta \\
i_\beta &= i_q \cos\vartheta + i_d \sin\vartheta
\end{aligned}$$

a opět anoalogicky pro u, což po dosazení do původních diferenciálních rovnic vede na

$$\begin{aligned}
\frac{d(i_d\cos\vartheta - i_q\sin\vartheta)}{dt} &= -\frac{R_s}{L_s}(i_d\cos\vartheta - i_q\sin\vartheta) + \frac{\psi_{pm}}{L_s}\omega\sin\vartheta + \frac{u_d\cos\vartheta - u_q\sin\vartheta}{L_s}\\
\frac{d(i_q\cos\vartheta + i_d\sin\vartheta)}{dt} &= -\frac{R_s}{L_s}(i_q\cos\vartheta + i_d\sin\vartheta) - \frac{\psi_{pm}}{L_s}\omega\cos\vartheta + \frac{u_q\cos\vartheta + u_d\sin\vartheta}{L_s}\\
\frac{d\omega}{dt} &= \frac{k_p p_p^2\psi_{pm}}{J}(i_q) - \frac{B}{J}\omega - \frac{p_p}{J}T_L\\
\frac{d\vartheta}{dt} &= \omega
\end{aligned}$$

ve třetí rovnici rovnou dosadíme i_q, čtvrtá se nemění a z prvních dvou vyjádříme rovnice pro proudy a napětí v d a q, například tak, že první rovnici násobíme $\cos\vartheta$ a sečteme s druhou násobenou $\sin\vartheta$, dále pak první rovnici násobenou $-\sin\vartheta$ sečteme s druhou násobenou $\cos\vartheta$, tento postup vede na rovnice

$$\begin{aligned}
\frac{di_d}{dt} - i_q\omega &= -\frac{R_s}{L_s}i_d + \frac{u_d}{L_s}\\
\frac{di_q}{dt} + i_d\omega &= -\frac{R_s}{L_s}i_q - \frac{\psi_{pm}}{L_s}\omega + \frac{u_q}{L_s}\\
\frac{d\omega}{dt} &= \frac{k_p p_p^2\psi_{pm}}{J}i_q - \frac{B}{J}\omega - \frac{p_p}{J}T_L\\
\frac{d\vartheta}{dt} &= \omega
\end{aligned}$$

otázkou je co se členy $-i_q\omega$ a $i_d\omega$ na levé straně první a druhé rovnice, protože když bychom nejdříve provedli diskretizaci a až následně převod do dq souřadnic, tyto členy zřejmě nevzniknou, nevzniknou také, když soustavu dq definujeme ne jako pootočenou o ϑ, ale jako soustavu pootočenou o nějaké konstantní ε, proto se bude vhodné ***otestovat***, jaký je vliv těchto členů

diskretizovaná verze rovnic v dq je tedy

$$\begin{aligned}
i_{d,t+1} + (-i_{q,t}\omega_t) &= \left(1 - \frac{R_s}{L_s}\Delta t\right)i_{d,t} + \frac{u_{d,t}}{L_s}\\
i_{q,t+1} + (i_{d,t}\omega_t) &= \left(1 - \frac{R_s}{L_s}\Delta t\right)i_{q,t} - \frac{\psi_{pm}}{L_s}\omega_t + \frac{u_{q,t}}{L_s}\\
\omega_{t+1} &= \left(1 - \frac{B}{J}\Delta t\right)\omega_t + \Delta t\frac{k_p p_p^2\psi_{pm}}{J}i_{q,t} - \frac{p_p}{J}T_L\Delta t\\
\vartheta_{t+1} &= \vartheta_t + \omega_t\Delta t
\end{aligned}$$

Vliv červených členů:

1. testováno na simulátoru, který s nimi ale asi nepočítá a tedy je výsledek špatný, dost se to rozkmitá (i když to teda drží tvar křivky), řídící napětí jde na dorazy, prostě je to špatný, jak by to běželo na skutečném motoru je otázka – **chyba v implementaci !!!**

2. **opravený závěr:**

   - test na simulátoru, sledováno na omegách (otáčky)
   - s červenýmí členy funguje dobře, v nízkých otáčkách výsledky téměř stejné, liší se jen velmi nepatrně (zanedbatelné řádově)
   - s rostoucími otáčkami prakticky stejné až do určité hodnoty cca 500 otáček, při pomalejší rampě cca 600-700 otáček už regulátor založený na verzi **bez** červených členů nezvládne držet krok, což je pravděpodobně způsobeno tím, že řízení jde na dorazy, ty se oříznou a vzniká nelinearita
   - nicméně se to nepokazí úplně, nastane jen trochu pokles a drží to hodnotu
   - regulátor **s** červenými členy se pak ukáže jako lepší a dokáže jít o mnoho dál až k cca 3000 otáčkám, pak se opět zastaví na hodnotě a nezvládne jít dál
   - pozn.: před dosažením "kritické" hodnoty dochází k menším záchvěvům (ale menším než při prudké změně požadované hodnoty)