

České vysoké učení technické v Praze  
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská

Katedra matematiky

Obor: Inženýrská informatika

Zaměření: Softwarové inženýrství a matematická informatika



Metody duálního řízení elektrických pohonů

Dual control methods for electrical drives

## VÝZKUMNÝ ÚKOL

Vypracoval: Michal Vahala

Vedoucí práce: Ing. Václav Šmídl, Ph.D.

Rok: 2011

**Prohlášení**

Prohlašuji, že jsem výzkumný úkol vypracoval samostatně a použil jsem pouze podklady uvedené v příloženém seznamu.

V Praze dne .....

.....

Michal Vahala

## **Poděkování**

Především bych chtěl poděkovat

Michal Vahala

**Název práce:**

Metody duálního řízení elektrických pohonů

**Autor:** Michal Vahala

**Obor:** Inženýrská informatika

**Druh práce:** Výzkumný úkol

**Vedoucí práce:** Ing. Václav Šmídl, Ph.D.

**Abstrakt:**

**Klíčová slova:**

**Title:**

Dual control methods for electrical drives

**Author:** Michal Vahala

**Abstract:**

**Key words:**

# Obsah

<b>Úvod</b>	<b>8</b>
<b>1 Popis PMSM</b>	<b>9</b>
1.1 Vlastnosti	9
1.1.1 Permanentní magnety	9
1.1.2 Výhody a nevýhody PMSM	9
1.2 Konstrukce	11
1.3 Souřadné soustavy	11
1.4 Transformace souřadnic	12
1.4.1 Transformace $a - b - c \longleftrightarrow \alpha - \beta$	12
1.4.2 Transformace $\alpha - \beta \longleftrightarrow d - q$	13
1.5 Odvození rovnic	13
1.5.1 Odvození rovnic v $d - q$ soustavě	13
1.5.2 Odvození rovnic v $\alpha - \beta$ soustavě	15
1.5.3 Odvození rovnice pro $\omega$ v $d - q$ soustavě pro různé indukčnosti	18
1.5.4 Diskretizace	19
1.5.5 Rotace do $d - q$	19
1.6 Problematika modelu	21
<b>2 Algoritmy pro odhadování stavových veličin</b>	<b>22</b>
2.1 Rozdělení stavových veličin	22
2.1.1 Mechanické veličiny	22
2.1.2 Elektrické veličiny	22
2.1.3 Bezsenzorové řízení	22
2.2 Senzorové metody	23
2.2.1 Senzory	23
2.2.2 Rezolvery	23
2.3 Zpětné elektromotorické síly	23
2.3.1 Metody	24
2.3.2 Další vlastnosti	28
2.3.3 Rozšířený Kalmanův filtr	28
2.4 Injektáže	29
2.4.1 Základní postup užití injektáže	29
2.4.2 Metody	29
2.5 Hybridní metody	30

<b>3</b>	<b>Řízení</b>	<b>32</b>
3.1	Základní řídicí strategie . . . . .	33
3.1.1	PI regulátor . . . . .	33
3.1.2	Skalární řízení . . . . .	33
3.1.3	Vektorové řízení . . . . .	34
3.1.4	Přímé řízení momentu . . . . .	35
3.2	Lineárně kvadratické řízení . . . . .	35
3.2.1	Implementace . . . . .	36
3.3	Duální řízení . . . . .	36
3.3.1	Formulace problému duálního řízení . . . . .	37
3.3.2	Stručný přehled duálních metod . . . . .	38
3.3.3	Vybrané algoritmy pro duální řízení . . . . .	39
3.3.4	Injektáže a duální řízení . . . . .	41
<b>4</b>	<b>Návrh a vyhodnocení</b>	<b>42</b>
4.1	Implementace LQ řízení pro stejné indukčnosti . . . . .	42
4.1.1	LQ řízení v $\alpha - \beta$ . . . . .	42
4.1.2	LQ řízení v $d - q$ . . . . .	45
4.2	Konkrétní hodnoty parametrů . . . . .	46
4.2.1	Parametry PMSM . . . . .	46
4.2.2	Kovarianční matice . . . . .	47
4.2.3	Další hodnoty . . . . .	47
4.3	TODO . . . . .	47
	<b>Závěr</b>	<b>48</b>
	<b>Literatura</b>	<b>49</b>

# Seznam použitého označení a zkratek

## Zkratky

*PMSM* synchronní stroj s permanentními magnety (*Permanent Magnet Synchronous Machine*)

*SMPMSM* PMSM s magnety na povrchu rotoru (*Surface Mounted PMSM*)

*IPMSM* PMSM s magnety uvnitř rotoru (*Inner PMSM*)

*LQG* lineárně kvadraticky gaussovské řízení (*Linear-Quadratic-Gaussian*)

*PI* proporcionálně integrační regulátor

*EKF* rozšířený Kalmanův filtr (*Extended Kalman Filter*)

## Označení

$\hat{a}$  značí odhad veličiny  $a$

$j$  komplexní jednotka

# Úvod

Hlavní náplní této práce je řízení elektrických pohonů, konkrétně synchronního motoru s permanentními magnety (v textu bude označován zkratkou PMSM z anglického *Permanent Magnet Synchronous Machine*). Jedná se o synchronní stroj, tedy rotor se otáčí současně (synchronně) s točivým magnetickým polem statoru. Na rotoru má ale místo budícího vinutí permanentní magnety. Tato konstrukce nachází v poslední době stále větší uplatnění. Je tomu tak především z důvodu snadnější dostupnosti kvalitních permanentních magnetů, ale také díky možnosti využít stále výkonější polovodičová zařízení pro řízení a napájení těchto strojů.

Jak se ale ukazuje, řízení takovýchto strojů, zjeměna pokud se jedná o takzvaný bezsenzorový návrh je netriviální. Je tedy třeba hledat vhodné řídicí algoritmy, které zvládnou motor efektivně řídit i v bezsenzorovém případě a umožní širší nasazení PMSM v praxi.

V tomto textu je nejdříve stručně popsán samotný PMSM, následuje odvození rovnic popisující tento stroj v nejčastěji používaných souřadných soustavách. Dále je formulována problematika estimace a určování stavových veličin, kdy je kladen důraz na bezsenzorový případ. Následuje popis nejčastěji používaných řídicích technik, které jsou současně dostatečně jednoduché, aby mohly být teoreticky nasazeny i pro případ řízení v reálném čase. Zvláštní pozornost je věnována řízení označovanému jako LQG.

Dále se text věnuje duálnímu řízení, které se zdá být vhodným kandidátem na zvládnutí úlohy řízení PMSM. Protože je však problém duálního řízení obecně velmi složitá úloha, zaměříme se na jeho nejjednodušší případy, které by mohly být nasazeny i v reálném čase.

Na závěr jsou prezentovány výsledky simulací a jsou navrženy směry a metody, které by mohly vést k úspěšnému řešení problému.

**Poznámka** V celém textu bude  $j$  označovat komplexní jednotku  $j = \sqrt{-1}$ . Označení  $i$  bude obvykle značit elektrický proud, komplexní jednotku však nikdy.



# 1 Popis PMSM

## 1.1 Vlastnosti

### 1.1.1 Permanentní magnety

Jak již bylo řečeno pro PMSM mají velký význam kvalitní permanentní magnety. Podle [29, 18] jsou magnety vhodné pro PMSM vyráběny ze speciálních slitin nejčastěji na bázi prvků  $Sm - Co$  nebo  $Nd - Fe - B$ . Oproti klasickým feritovým magnetům se vyznačují velkou magnetickou indukcí okolo  $1T$  oproti přibližně  $0,3T$  u feritových magnetů.

Nevýhodou nejen těchto, ale permanentních magnetů obecně je změna jejich magnetických vlastností s teplotou. Jedná se především o hranici označovanou jako *Curieův bod*, kdy materiál přechází z feromagnetického stavu do paramagnetického a s tím je spojen výrazný pokles magnetizmu. Tato hodnota závisí na použitém materiálu a pohybuje se přibližně v rozmezí  $200 - 1000^{\circ}C$ . Z toho vyplývá, že je nutné udržovat motor na vhodné provozní teplotě a tedy zajistit odpovídající chlazení.

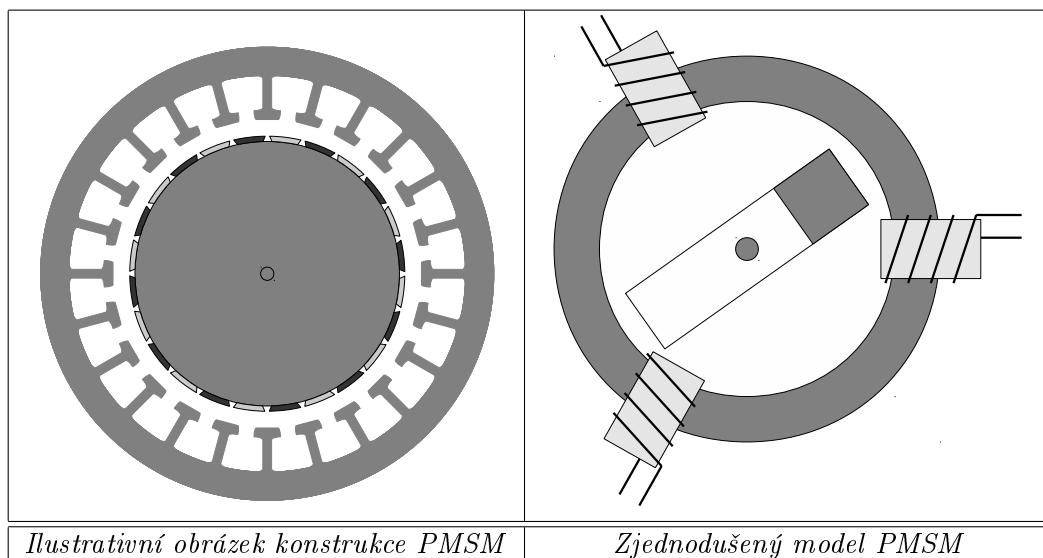
### 1.1.2 Výhody a nevýhody PMSM

Následující část popisující výhody a nevýhody čerpá především ze zdrojů [29, 18]

#### Výhody

Proč se PMSM využívají a jaké mají výhody oproti jiným motorům. Uveďme především:

- rotor neobsahuje vinutí a tedy
  - je možno jej konstruovat menší, což je velmi výhodné v aplikacích, kde záleží na co nejmenší velikosti pohonu, příkladem mohou být dopravní prostředky, kde lze ušetřené místo využít například pro cestující (nízkopodlažní tramvaj)
  - je možno jej konstruovat lehčí, což snižuje hmotnost celého zařízení
  - má menší moment setrvačnosti rotoru
  - není třeba složitě přivádět napájení na rotor
- není třeba motor před rozběhem budít a nepotřebuje zdroj budícího proudu
- odpadá problém s přívodem proudu do buzení rotoru
- vyšší účinnost – nejsou jouleovy ztráty v rotoru (oproti asynchronnímu stroji) popřípadě v buzení (oproti synchronnímu stroji s buzením)



Obrázek 1.1: Konstrukce a model PMSM

- momentová přetížitelnost
- možnost konstrukce pomaluběžného stroje s dostatečným výkonem, který nepotřebuje převodovku (výhody spojené s absencí převodovky)

### Nevýhody

Na druhou stranu toto řešení motoru má i své nevýhody, jedná se zejména o:

- technologicky složitější výroba – připevnění permanentních magnetů na rotor (nejčastěji lepení)
- složitější opravy
- vyšší cena (nezanetbatelné náklady na permanentní magnety)
- menší robustnost
- problematické odbuzování
- nutnost dobrého chlazení – závislost magnetických vlastností permanentních magnetů na teplotě
- problematika spojená s návrhem řízení těchto strojů (bude detailněji rozebrána níže)

## 1.2 Konstrukce

Základní konstrukce PMSM je na obrázku 1.1. Nákres je pouze ilustrativní, ale zobrazuje hlavní části PMSM: Vnější kruh představuje stator. Na něm jsou zuby, na kterých je navinuto statorové vinutí (v obrázku není zobrazeno). Vnitřní kruh je rotor, na jehož povrchu jsou umístěny právě permanentní magnety. U těchto magnetů je barevně rozlišen severní a jižní pól.

Často se lze setkat i s opačnou konstrukcí, kdy je stator umístěn uvnitř a rotor s magnety se otáčí kolem něj. Tato konstrukce PMSM se využívá například k pohonu nejrůznějších vozidel, kdy je motor umístěn přímo v kole vozidla, nebo k pohonu bubnu automatické pračky. Existují i další konstrukce PMSM. Zajímavou je například verze, která má otočný stator i rotor a toto zařízení pak může sloužit jako dělič výkonu.

Vyobrazená konstrukce je někdy také označována jako SMPMSM (*Surface Mounted PMSM*), tedy PMSM s magnety na povrchu. Další častou konstrukcí je IPMSM (*Inner PMSM*), kde jsou permanentní magnety umístěny uvnitř rotoru. Tyto verze mají nepatrně odlišné vlastnosti, které ale mají významný vliv při návrhu řízení těchto strojů. Pod PMSM se ještě zahrnují reluktanční motory, které jsou založeny na poněkud odlišném principu a dále se jimi vůbec zabývat nebudeme.

Pro představu a odvození základních rovnic však nepotřebujeme pracovat s příliš složitou konstrukcí a vystačíme si se zjednodušeným modelem, který je zobrazen na obrázku 1.1. Na statoru jsou zde umístěny pouze tři cívky, které představují vinutí jednotlivých fází. Rotor je pak reprezentován jediným permanentním magnetem. Pro základní představu je tento model dostačující, dále ale bude třeba rozšířit model o více párů pólů. PMSM na nákresu (zjednodušený model) má 1 pár pólů, ale reálné motory jich mívají obvykle více.

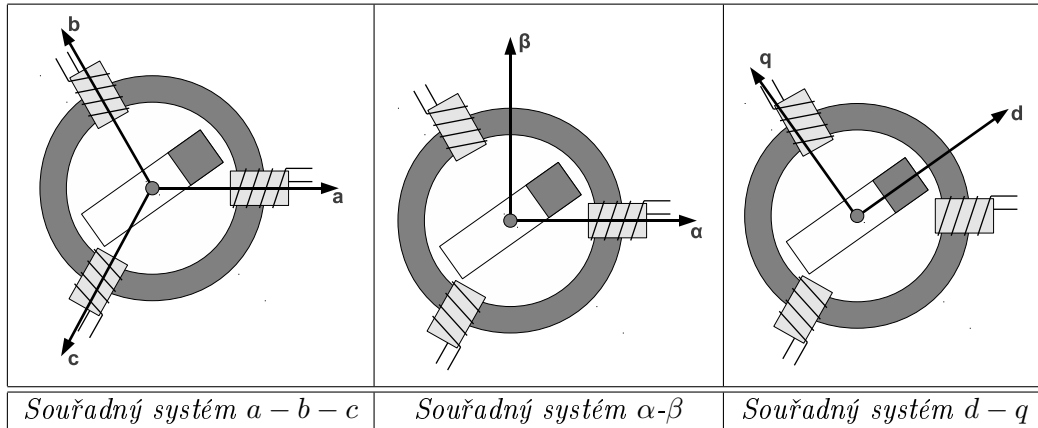
## 1.3 Souřadné soustavy

Pro popis a následné odvození rovnic se standartně používá několik souřadných systémů.

Prvním z nich je souřadný systém  $a - b - c$  znázorněný na obrázku 1.2. Jednotlivé osy tohoto souřadného systému ( $a$ ,  $b$ ,  $c$ ) jsou směřují ve směru os vinutí jednotlivých fází a jsou tedy vzájemně pootočený o  $120^\circ$ .

Protože ale k popsání polohy v rovině jsou tři souřadnice (v osách  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ) zbytečné a jedna z nich je vždy závislá, přecházíme k souřadnému systému  $\alpha - \beta$ , který je znázorněn na obrázku 1.2. Osa  $\alpha$  se totožná s osou  $a$  ze souřadného systému  $a - b - c$ , osa  $\beta$  je na ní pak kolmá. Osy  $\alpha - \beta$  tedy tvoří ortogonální systém.

Pro většinu aplikací se však ukazuje výhodným přejít do rotující soustavy  $d - q$ , která je svázána s rotorem. Její vyobrazení je na obrázku 1.2. Opět se jedná o ortogonální systém, kdy osu  $d$  orientujeme ve směru osy permanentního magnetu směřující k jeho severnímu pólu. Osa  $q$  je pak na ní kolmá.



Obrázek 1.2: Souřadné systémy

## 1.4 Transformace souřadnic

Mezi výše zmíněnými souřadnými soustavami platí následující převodní vztahy.

### 1.4.1 Transformace $a - b - c \longleftrightarrow \alpha - \beta$

Tato transformace se označuje také jako Clarkova transformace, rovnice lze nalézt například v [10], nebo je možné je poměrně snadno odvodit.

#### Převod $a - b - c \rightarrow \alpha - \beta$

Osa  $\alpha$  je totožná s osou  $a$  osy  $b$  a  $c$  jsou pak oproti ní otočeny o  $120^\circ$  respektive  $-120^\circ$ . Tedy souřadnice v ose  $\alpha$  získáme následujícím průmětem z os  $a$ ,  $b$ ,  $c$ :

$$\alpha = k(a + b \cdot \cos(120^\circ) + c \cdot \cos(-120^\circ)) = k\left(a - \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}c\right),$$

kde  $k$  značí konstantu  $k = \frac{2}{3}$ . Obdobně postupujeme v případě osy  $\beta$ . Osa  $a$  je na ní kolmá a tedy její příspěvek je nulový. Osy  $b$  a  $c$  promítnutne do osy  $\beta$  získáme vztah:

$$\beta = k(b \cdot \sin(120^\circ) + c \cdot \sin(-120^\circ)) = k\left(\frac{\sqrt{3}}{2}b - \frac{\sqrt{3}}{2}c\right).$$

Celkem tedy máme rovnice:

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{2}{3}\left(a - \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}c\right), \\ \beta &= \frac{\sqrt{3}}{3}(b - c).\end{aligned}$$

### Převod $\alpha - \beta \rightarrow a - b - c$

Pro inverzní transformaci platí následující vztahy:

$$\begin{aligned}a &= \alpha + \theta, \\b &= \left(-\frac{1}{2}\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\beta\right) + \theta, \\c &= \left(-\frac{1}{2}\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}\beta\right) + \theta,\end{aligned}$$

kde  $\theta$  představuje takzvanou nulovou složku  $\theta = \frac{1}{3}(a + b + c)$ .

### 1.4.2 Transformace $\alpha - \beta \longleftrightarrow d - q$

Transformace je označována jako Parkova transformace a představuje přechod do rotujícího souřadného systému. Rovnice transformace lze najít opět například v [10] nebo je možné je odvodit.

### Převod $\alpha - \beta \rightarrow d - q$

Předpokládáme otočení dostavy  $d - q$  oproti  $\alpha - \beta$  o úhel  $\phi$  kolem společného počátku souřadných soustav a tedy:

$$\begin{aligned}d &= \alpha \cos \phi + \beta \sin \phi, \\q &= -\alpha \sin \phi + \beta \cos \phi.\end{aligned}$$

### Převod $d - q \rightarrow \alpha - \beta$

Inverzní transformaci provedeme pouze otočením na druhou stranu:

$$\begin{aligned}\alpha &= d \cos \phi - q \sin \phi, \\\beta &= d \sin \phi + q \cos \phi.\end{aligned}$$

## 1.5 Odvození rovnic

### 1.5.1 Odvození rovnic v $d - q$ soustavě

Rovnice v  $d - q$  soustavě lze odvodit buď přímo nebo transformací rovnic z jiné soustavy. Přímé odvození bude uvedeno počínaje následujícím odstavcem, transformace z jiné soustavy (konkrétně  $\alpha - \beta$ ) bude pro srovnání a kontrolu uvedeno dále v textu.

Rovnici pro napětí v obvodu statoru synchronního stroje lze zapsat jako

$$u_s = R_s i_s + u_i,$$

tedy součet napětí v obvodu (Ohmův zákon) a indukovaného napětí, přičemž veličiny jsou uvažovány komplexní. Vyjádříme-li indukované napětí, jako změnu toku v čase (Faradayův zákon elektromagnetické indukce) přejde rovnice na tvar

$$u_s = R_s i_s + \frac{d\psi_s}{dt}.$$

Pro přechod do rotujícího souřadného systému předpokládáme obecně rotaci o úhel  $\varepsilon$ , kterou provedeme vynásobením všech veličin operátorem rotace v komplexních číslech  $e^{j\varepsilon}$ , kde  $j$  značí komplexní jednotku. Tedy

$$\begin{aligned} u_s e^{j\varepsilon} &= R_s i_s e^{j\varepsilon} + \frac{d(\psi_s e^{j\varepsilon})}{dt}, \\ u_s e^{j\varepsilon} &= R_s i_s e^{j\varepsilon} + \frac{d\psi_s}{dt} e^{j\varepsilon} + \psi_s j \omega_\varepsilon e^{j\varepsilon}, \\ u_s &= R_s i_s + \frac{d\psi_s}{dt} + \psi_s j \omega_\varepsilon, \end{aligned}$$

kde symbol  $\omega_\varepsilon$  označuje úhlovou rychlost – změnu úhlu  $\varepsilon$ , jedná se tedy o derivaci  $\omega_\varepsilon = \frac{d\varepsilon}{dt}$ . Tato úhlová rychlost  $\omega_\varepsilon$  odpovídá elektrickým otáčkám  $\omega_{el}$  a lze ji přepočítat na mechanické otáčky pomocí vztahu  $\omega_{el} = p_p \omega_m$ , kde  $p_p$  je počet párů polů rotoru a  $\omega_m$  mechanické otáčky. Když předpokládáme počet párů polů roven 1, je  $\omega_\varepsilon = \omega_m$ .

Nyní můžeme přejít k rovnicím v souřadném systému  $d - q$ , který je natočen oproti souřadnému systému statoru ( $\alpha - \beta$ ) o úhel  $\varepsilon = \vartheta$  a otáčí se rychlostí  $\omega$ . Osa magnetického toku rotoru je osou  $d$  a v tomto směru uvažujeme reálnou složku komplexních veličin, osa  $q$  je pak na ní kolmá a bude reprezentovat složku imaginární. Dostáváme tedy

$$u_d + j u_q = R_s (i_d + j i_q) + \frac{d(\psi_d + j \psi_q)}{dt} + (\psi_d + j \psi_q) j \omega_m,$$

což při rozepsání po složkách (reálná a imaginární) vede na rovnice

$$\begin{aligned} u_d &= R_s i_d + \frac{d\psi_d}{dt} - \omega_m \psi_q, \\ u_q &= R_s i_q + \frac{d\psi_q}{dt} + \omega_m \psi_d. \end{aligned}$$

Dále uvažujme vztahy pro magnetické toky

$$\begin{aligned} \psi_d &= L_d i_d + \psi_{pm}, \\ \psi_q &= L_q i_q. \end{aligned}$$

To po dosazení vede na rovnice

$$\begin{aligned} u_d &= R_s i_d + L_d \frac{di_d}{dt} - \omega_m L_q i_q, \\ u_q &= R_s i_q + L_q \frac{di_q}{dt} + \omega_m L_d i_d + \omega_m \psi_{pm}. \end{aligned}$$

Vydělením  $L_d$  respektive  $L_q$  získáme

$$\begin{aligned}\frac{di_d}{dt} &= -\frac{R_s}{L_d}i_d + \frac{L_q}{L_d}\omega_m i_q + \frac{1}{L_d}u_d, \\ \frac{di_q}{dt} &= -\frac{R_s}{L_q}i_q - \frac{\psi_{pm}}{L_q}\omega_m - \frac{L_d}{L_q}\omega_m i_d + \frac{1}{L_q}u_q.\end{aligned}$$

Když ale položíme  $L_d = L_q = L_s$  dostaneme rovnice

$$\begin{aligned}u_d &= R_s i_d + L_s \frac{di_d}{dt} - \omega_m L_s i_q, \\ u_q &= R_s i_q + L_s \frac{di_q}{dt} + \omega_m L_s i_d + \omega_m \psi_{pm}.\end{aligned}$$

Vydělení  $L_s$  pak vede na tvar

$$\begin{aligned}\frac{di_d}{dt} &= -\frac{R_s}{L_s}i_d + \omega_m i_q + \frac{u_d}{L_s}, \\ \frac{di_q}{dt} &= -\frac{R_s}{L_s}i_q - \frac{\psi_{pm}}{L_s}\omega_m - \omega_m i_d + \frac{u_q}{L_s}.\end{aligned}$$

Toto vyjádření je shodné s tím, které dostaneme následně transformací z  $\alpha - \beta$  souřadné soustavy.

### 1.5.2 Odvození rovnic v $\alpha - \beta$ soustavě

I když se pro řízení ukazuje být lepší a v praxi více využívané vyjádření v soustavě  $d - q$ , rovnice v  $\alpha - \beta$  jsou také důležité, protože představují přímý vztah mezi měřenými a řízenými veličinami. Mohou být využity například při návrhu rozšířeného Kalmanova filtru.

Opět vyjdeme z rovnice

$$u_s = R_s i_s + \frac{d\psi_s}{dt}.$$

Magnetický tok  $\psi_s$  vyjádříme jako tok vytvořený cívkami statoru a dále přičteme tok permanentních magnetů, je však třeba uvažovat, že rotor obsahující permanentní magnety je natočen obecně pod úhlem  $\vartheta$ . Tedy v komplexní rovině lze vyjádřit tok jako

$$\psi_s = L_s i_s + \psi_{pm} e^{j\vartheta}.$$

Dosadíme nyní do rovnice a rozepíšeme ji po složkách

$$\begin{aligned}u_s &= R_s i_s + \frac{d(L_s i_s + \psi_{pm} e^{j\vartheta})}{dt}, \\ u_\alpha + j u_\beta &= R_s (i_\alpha + j i_\beta) + \frac{d}{dt} (L_s (i_\alpha + j i_\beta) + \psi_{pm} (\cos \vartheta + j \sin \vartheta)).\end{aligned}$$

Rozepsání na dvě rovnice je pak následující

$$\begin{aligned} u_\alpha &= R_s i_\alpha + L_s \frac{di_\alpha}{dt} - \frac{d\vartheta}{dt} \psi_{pm} \sin \vartheta, \\ u_\beta &= R_s i_\beta + L_s \frac{di_\beta}{dt} + \frac{d\vartheta}{dt} \psi_{pm} \cos \vartheta. \end{aligned}$$

Rovnice vydělíme indukčností  $L_s$ , vyjádříme z nich derivace proudů a derivace úhlu natočení označíme jako úhlovou rychlost  $\frac{d\vartheta}{dt} = \omega$ . Následně dostaneme rovnice v souřadné soustavě  $\alpha - \beta$ :

$$\begin{aligned} \frac{di_\alpha}{dt} &= -\frac{R_s}{L_s} i_\alpha + \frac{\psi_{pm}}{L_s} \omega \sin \vartheta + \frac{u_\alpha}{L_s}, \\ \frac{di_\beta}{dt} &= -\frac{R_s}{L_s} i_\beta - \frac{\psi_{pm}}{L_s} \omega \cos \vartheta + \frac{u_\beta}{L_s}. \end{aligned}$$

Nyní je ještě třeba přidat další dvě diferenciální rovnice pro otáčky  $\omega$  a polohu  $\vartheta$ . Rovnice pro  $\vartheta$  je triviální a už byla užita, jedná se o

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \omega.$$

### Rovnice pro $\omega$

Rovnice pro  $\omega$  získáme následujícím postupem ze základních zákonů mechaniky: Pro točivý moment (speciální případ momentu síly pro silovou dvojici, kdy se vektory skládají na nulu, avšak mají točivý účinek, v anglické literatuře označeno jako *torque*) platí obecně vztah

$$\tau = \frac{dL}{dt},$$

kde  $L$  označuje moment hybnosti (*angular momentum*). Při uvažování působení více točivých momentů momentů pak

$$\tau_1 + \dots + \tau_n = \sum \tau = \frac{dL}{dt}.$$

Uvažujeme-li rotaci kolem pevné osy, lze moment hybnosti vyjádřit jako

$$L = J\omega_m,$$

kde  $J$  označuje moment setrvačnosti (*moment of inertia*) a  $\omega_m$  je mechanická úhlová rychlost. Po dosazení tedy

$$\sum \tau = \frac{dL}{dt} = \frac{d(J\omega_m)}{dt} = J \frac{d\omega_m}{dt}.$$

Točivé momenty  $\sum \tau$  jsou:

- moment získaný konverzním procesem elektrické energie, který vyjadřuje hlavní vlastnost točivého stroje, a to právě převod elektrické energie na mechanickou, tento moment označíme jako  $T_e$



- zátěžný moment reprezentující zatížení stroje, tedy v podstatě to, co je motorem poháněno, je však třeba uvažovat, že působí v opačném směru a stroj brzdí, označíme ho tedy  $-T_L$
- dále je ještě třeba uvažovat ztráty ve stroji v důsledku tření, tento moment opět působí v opačném směru a uvažujeme jej lineárně závislý na otáčkách  $\omega_m$ , tedy  $-B\omega_m$ , kde  $B$  je koeficient viskozity (tření)

Rovnice po dosazení tedy přejde na tvar

$$T_e - T_L - B\omega_m = J \frac{d\omega_m}{dt}.$$

Nyní je ještě třeba vyjádřit točivý moment  $T_e$  na základě elektrických veličin. Toho lze dosáhnout výpočtem přes okamžitý elektrický výkon, pro trojfázový systém

$$P = u_a i_a + u_b i_b + u_c i_c.$$

Po transformaci do systému  $\alpha - \beta$  získáme vyjádření

$$P = k_p (u_\alpha i_\alpha + u_\beta i_\beta),$$

kde  $k_p$  označuje Parkovu konstantu s hodnotou  $k_p = \frac{3}{2}$ . Napětí je zde uvažováno indukované  $u_i = \frac{d\psi_s}{dt} = \frac{d(L_s i_s + \psi_{pm} e^{j\vartheta})}{dt} = L_s \frac{di_s}{dt} + j\omega \psi_{pm} e^{j\vartheta}$  a z něj využijeme pouze složku bez derivace proudu, protože ta slouží k tvorbě samotného magnetického pole stroje a nepodílí se na tvorbě výkonu, tedy  $\omega \psi_{pm} j(\cos \vartheta + j \sin \vartheta)$ . V systému  $\alpha\beta$  získáme vyjádření

$$\begin{aligned} u_\alpha &= -\omega \psi_{pm} \sin \vartheta, \\ u_\beta &= \omega \psi_{pm} \cos \vartheta, \end{aligned}$$

po dosazení

$$P = k_p (-i_\alpha \omega \psi_{pm} \sin \vartheta + i_\beta \omega \psi_{pm} \cos \vartheta).$$

Moment  $T_e$  lze pak určit ze vztahu  $P = \omega_m T_e$  a tedy

$$T_e = \frac{P}{\omega_m} = k_p \frac{i_\beta \omega \psi_{pm} \cos \vartheta - i_\alpha \omega \psi_{pm} \sin \vartheta}{\omega_m} = k_p p_p \psi_{pm} (i_\beta \cos \vartheta - i_\alpha \sin \vartheta),$$

kde jsme využili vztahu  $\frac{\omega}{\omega_m} = p_p$ .

Dosazení do rovnice pro momenty pak vede na tvar

$$k_p p_p \psi_{pm} (i_\beta \cos \vartheta - i_\alpha \sin \vartheta) - T_L - B\omega_m = J \frac{d\omega_m}{dt}.$$

Ještě je třeba upravit rovnici tak, aby v ní nevystupovaly mechanické otáčky  $\omega_m$ , ale otáčky elektrické  $\omega$ . Toho je možno snadno dosáhnout násobením celé rovnice  $p_p$ . Rovnici ještě vydělíme momentem setrvačnosti  $J$  a získáme tvar

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{k_p p_p^2 \psi_{pm}}{J} (i_\beta \cos \vartheta - i_\alpha \sin \vartheta) - \frac{T_L p_p}{J} - \frac{B}{J} \omega.$$

Tedy máme poslední rovnici následující soustavy:

$$\begin{aligned}\frac{di_\alpha}{dt} &= -\frac{R_s}{L_s}i_\alpha + \frac{\psi_{pm}}{L_s}\omega \sin \vartheta + \frac{u_\alpha}{L_s}, \\ \frac{di_\beta}{dt} &= -\frac{R_s}{L_s}i_\beta - \frac{\psi_{pm}}{L_s}\omega \cos \vartheta + \frac{u_\beta}{L_s}, \\ \frac{d\omega}{dt} &= \frac{k_p p_p^2 \psi_{pm}}{J} (i_\beta \cos \vartheta - i_\alpha \sin \vartheta) - \frac{B}{J}\omega - \frac{p_p}{J}T_L, \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= \omega.\end{aligned}$$

### 1.5.3 Odvození rovnice pro $\omega$ v $d - q$ soustavě pro různé indukčnosti

Zatím jsme ve většině případů předchozího odvození učinili zjednodušující předpoklad stejných indukčností  $L_d = L_q = L_s$ . To relativně dobře platí pro případ SMPMSM. Pro IPMSM a přesnější model SMPMSM toto však neplatí a  $L_d \neq L_q$ . Tato vlastnost bude také velmi důležitá při užití estimačních technik označovaných jako *injektáže* (detailněji dále v textu). Mít tedy k dispozici i rovnice pro různé indukčnosti je velmi žádoucí. Rovnice pro proudy v  $d - q$  souřadnicích s různými indukčnostmi jsou již uvedeny v části 1.5.1. Rovnice pro  $\omega$  bude odvozena nyní:

Opět vyjdeme z analogických vztahů jako při předchozím odvození pro  $\alpha - \beta$ , tedy

$$T_e - T_L - B\omega_m = J \frac{d\omega_m}{dt},$$

kde vyjádříme  $T_e$  ze vztahu

$$T_e = \frac{P}{\omega_m}.$$

Tedy transformujeme následující vyjádření pro výkon z  $\alpha - \beta$  do  $d - q$

$$\begin{aligned}P &= k_p (u_\alpha i_\alpha + u_\beta i_\beta), \\ P &= k_p ((u_d \cos \vartheta - u_q \sin \vartheta) (i_d \cos \vartheta - i_q \sin \vartheta) + (u_q \cos \vartheta + u_d \sin \vartheta) (i_q \cos \vartheta + i_d \sin \vartheta)), \\ P &= k_p (u_d i_d + u_q i_q).\end{aligned}$$

Opět dosadíme za  $u_{d,q}$  složky indukovaného napětí bez derivace proudů

$$\begin{aligned}u_d &= -\omega L_q i_q, \\ u_q &= \omega L_d i_d + \omega \psi_{pm}.\end{aligned}$$

To vede na

$$\begin{aligned}P &= k_p (-\omega L_q i_q i_d + (\omega L_d i_d + \omega \psi_{pm}) i_q), \\ P &= k_p \omega (i_d i_q (L_d - L_q) + \psi_{pm} i_q).\end{aligned}$$

A po dosazení získáme vyjádření pro moment  $T_e$  ve tvaru

$$T_e = k_p p_p (i_d i_q (L_d - L_q) + \psi_{pm} i_q).$$

Rovnice  $T_e - T_L - B\omega_m = J\frac{d\omega_m}{dt}$  pak po dosazení  $T_e$ , vydělení  $J$  a násobení  $p_p$  přejde na tvar

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{k_p p_p^2}{J} ((L_d - L_q) i_d i_q + \psi_{pm} i_q) - \frac{B}{J} \omega - \frac{p_p}{J} T_L.$$

#### 1.5.4 Diskretizace

Výpočty jsou prováděny výhradně na počítači, simulace na PC a v případě řízení reálného stroje se obvykle užívá DSP. Je tedy třeba výše odvozené diferenciální rovnice diskretizovat a převést na rovnice diferenční. Diskretizaci je vhodné volit co možná nejjednodušší, aby se příliš nekomplikovaly výsledné rovnice a aby bylo umožněno jejich případné rychlé zpracování v reálném čase.

Diskretizaci pomocí Eulerovy metody s časovým krokem  $\Delta t$  získáme následující diskrétní diferenční rovnice:

$$\begin{aligned} i_{\alpha,t+1} &= \left(1 - \frac{R_s}{L_s} \Delta t\right) i_{\alpha,t} + \frac{\psi_{pm} \Delta t}{L_s} \omega_t \sin \vartheta_t + \frac{\Delta t}{L_s} u_{\alpha,t}, \\ i_{\beta,t+1} &= \left(1 - \frac{R_s}{L_s} \Delta t\right) i_{\beta,t} - \frac{\psi_{pm} \Delta t}{L_s} \omega_t \cos \vartheta_t + \frac{\Delta t}{L_s} u_{\beta,t}, \\ \omega_{t+1} &= \left(1 - \frac{B}{J} \Delta t\right) \omega_t + \frac{k_p p_p^2 \psi_{pm}}{J} \Delta t (i_{\beta,t} \cos \vartheta_t - i_{\alpha,t} \sin \vartheta_t) - \frac{p_p}{J} T_L \Delta t, \\ \vartheta_{t+1} &= \vartheta_t + \omega_t \Delta t. \end{aligned}$$

#### 1.5.5 Rotace do $d - q$

Nyní ještě provedeme rotaci rovnic ze souřadnic  $\alpha - \beta$  do  $d - q$ . Jednak v diferenciálním případě, který bude následovat diskretizace, ale také v diskrétním případě diferenčních rovnic. Oba postupy pak budou srovnány.

Převod do rotující souřadné soustavy  $d - q$  pootočené o úhel  $\vartheta$  a rotoující rychlostí  $\omega$ :

$$\begin{bmatrix} x_d \\ x_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \vartheta & \sin \vartheta \\ -\sin \vartheta & \cos \vartheta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_\alpha \\ x_\beta \end{bmatrix},$$

viz 1.4.2 nebo stejného efektu lze dosáhnout i použitím komplexních souřadnic a zápisem  $x_{dq} = e^{j\vartheta} x_{\alpha\beta}$ , jako v části 1.5.1.

Následně tedy

$$\begin{aligned} i_d &= i_\alpha \cos \vartheta + i_\beta \sin \vartheta, \\ i_q &= i_\beta \cos \vartheta - i_\alpha \sin \vartheta, \end{aligned}$$

a analogicky pro  $u$ . Naopak pro inverzní transformaci

$$\begin{aligned} i_\alpha &= i_d \cos \vartheta - i_q \sin \vartheta, \\ i_\beta &= i_q \cos \vartheta + i_d \sin \vartheta, \end{aligned}$$

a opět anoalogicky pro  $u$ . To po dosazení do původních diferenciálních rovnic vede na

$$\begin{aligned}\frac{d(i_d \cos \vartheta - i_q \sin \vartheta)}{dt} &= -\frac{R_s}{L_s}(i_d \cos \vartheta - i_q \sin \vartheta) + \frac{\psi_{pm}}{L_s}\omega \sin \vartheta + \frac{u_d \cos \vartheta - u_q \sin \vartheta}{L_s}, \\ \frac{d(i_q \cos \vartheta + i_d \sin \vartheta)}{dt} &= -\frac{R_s}{L_s}(i_q \cos \vartheta + i_d \sin \vartheta) - \frac{\psi_{pm}}{L_s}\omega \cos \vartheta + \frac{u_q \cos \vartheta + u_d \sin \vartheta}{L_s}, \\ \frac{d\omega}{dt} &= \frac{k_p p_p^2 \psi_{pm}}{J} i_q - \frac{B}{J}\omega - \frac{p_p}{J}T_L, \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= \omega.\end{aligned}$$

Ve třetí rovnici rovnou dosadíme  $i_q$ , čtvrtá se nemění a z prvních dvou vyjádříme rovnice pro proudy a napětí v  $d$  a  $q$ , například tak, že první rovnici násobíme  $\cos \vartheta$  a sečteme s druhou násobenou  $\sin \vartheta$ , dále pak první rovnici násobenou  $-\sin \vartheta$  sečteme s druhou násobenou  $\cos \vartheta$ , tento postup vede na rovnice

$$\begin{aligned}\frac{di_d}{dt} &= -\frac{R_s}{L_s}i_d - i_q\omega + \frac{u_d}{L_s}, \\ \frac{di_q}{dt} &= i_d\omega - \frac{R_s}{L_s}i_q - \frac{\psi_{pm}}{L_s}\omega + \frac{u_q}{L_s}, \\ \frac{d\omega}{dt} &= \frac{k_p p_p^2 \psi_{pm}}{J}i_q - \frac{B}{J}\omega - \frac{p_p}{J}T_L, \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= \omega.\end{aligned}$$

Zde jsou zajímavé členy  $-i_q\omega$  a  $i_d\omega$  v první a druhé rovnici, protože když bychom nejdříve provedli diskretizaci a až následně převod do  $d-q$  souřadnic, tyto členy zřejmě nevzniknou. Nevzniknou také, když soustavu  $d-q$  definujeme ne jako pootočenou o  $\vartheta$ , ale jako soustavu pootočenou o nějaké konstantní  $\varepsilon$ . Z formálního hlediska se jeví jako nejvíce správné řešení zahrnující tyto členy. Pro praktické použití ale je vhodné otestovat, jaký je vliv těchto členů. Diskretizovaná verze rovnic v  $d-q$  je tedy

$$\begin{aligned}i_{d,t+1} + \left| \overline{(-\Delta t \cdot i_{q,t}\omega_t)} \right| &= \left(1 - \frac{R_s}{L_s}\Delta t\right) i_{d,t} + \frac{\Delta t}{L_s}u_{d,t}, \\ i_{q,t+1} + \left| \overline{(+\Delta t \cdot i_{d,t}\omega_t)} \right| &= \left(1 - \frac{R_s}{L_s}\Delta t\right) i_{q,t} - \frac{\psi_{pm}\Delta t}{L_s}\omega_t + \frac{\Delta t}{L_s}u_{q,t}, \\ \omega_{t+1} &= \left(1 - \frac{B}{J}\Delta t\right) \omega_t + \Delta t \frac{k_p p_p^2 \psi_{pm}}{J}i_{q,t} - \frac{p_p}{J}T_L\Delta t, \\ \vartheta_{t+1} &= \vartheta_t + \omega_t\Delta t,\end{aligned}\tag{1.1}$$

kde „problematické“ členy jsou v rámečku.

## 1.6 Problematika modelu

Dále budeme pracovat zpravidla převážně s rovnicemi odvozenými v předchozí části a skutečný stroj ustoupí do pozadí. Je však třeba mít na paměti, že za rovnicemi se skrývá fyzikální realita a mnoho jevů, které ji doprovází. Tyto jevy se totiž při aplikaci regulátoru na skutečném stroji projeví. Jedná se především o následující body:

- **nepřesnost modelu** – chyby způsobené zanedbáním nejrůznějších fyzikálních vlivů a důsledky zjednodušujících předpokladů, například závislosti některých veličin na teplotě, syčení magnetických obvodů, obecně nekonzstantní parametry stroje atd.
- **nedokonalosti stroje** – žádný stroj nebude vyrobený přesně, aby odpovídal modelu, vyskytnou se různé nerovnosti, nesymetrie a podobně
- **diskretizační a zaokrouhlovací chyby** – řízení je navrhováno pro digitální počítač a tedy dříve nebo později je třeba provést diskretizaci a kvantizaci všech zpracovávaných veličin
- **chyby měření** – měřicí přístroje a čidla, která získávají informace o motoru nejsou přesná, mají pouze určitou rozlišovací schopnost a také omezenou možnost předat informaci, zejména pokud se jedná o digitální zařízení
- **napájecí zdroj** – zařízení, které dodává regulátorem požadované napětí do stroje není ideální, naopak odpovídá ideálním požadavkům zpravidla velmi špatně, využívá pulzní šířkové modulace (PWM) a invertoru; tyto zařízení pak přinášejí množství negativních efektů

Tyto jevy se velmi těžko popisují a jejich zachycení v modelu přináší mnoho komplikací. Většinu z nich ani nedokážeme popsat a předvídat. Proto se pokusíme co nejvíce z výše zmíněných problémů zahrnout pod pojem šum. Vzniká pak ale otázka, jak takový šum vhodně nastavit v modelu, aby alespoň přibližně odpovídal problematickým jevům. V rovnicích z předchozí části tedy budeme navíc ještě uvažovat jednoduchý model šumu a to aditivní bílý Gaussovský šum.

## 2 Algoritmy pro odhadování stavových veličin

### 2.1 Rozdělení stavových veličin

#### 2.1.1 Mechanické veličiny

Pro řízení PMSM je důležité, že se jedná o synchronní stroj, kdy se rotor otáčí současně (synchronně) s točivým magnetickým polem vytvořeným cívkami statoru. Proto, když chceme navrhnout řízení takového stroje musíme nutně znát polohu rotoru  $\vartheta$ , a to s relativně velkou přesností. Dále, protože se v textu zaměřujeme na řízení rychlosti stroje (regulovanou veličinou jsou otáčky rotoru) potřebujeme znát i hodnotu otáček  $\omega$ . Problematika získání těchto hodnot se však ukazuje být netriviální. Obecně existuje několik přístupů, které budou detailněji rozebrány dále v textu.

**Poznámka:** Zmiňované veličiny  $\vartheta$  a  $\omega$  jsou svázány jednoduchým diferenciálním vztahem  $\frac{d\vartheta}{dt} = \omega$ . Při praktickém užití, kdy rovnice diskretizujeme, může být ale výpočet derivace popřípadě integrálu velmi nepřesný. Dáváme tedy přednost metodám estimace těchto veličin, které nám poskytují odhad obou.

#### 2.1.2 Elektrické veličiny

Co se týče dalších (elektrických) stavových veličin systému, ve výše uvedených rovnicích vystupují ještě proudy  $i$  a napětí  $u$ . Proud  $i$  předpokládáme, že měříme, samozřejmě jen s určitou přesností. Napětí  $u$  pak jsou vstupy, kterými řídíme systém. Ty navrhujeme a tedy je předpokládáme známé, je však třeba uvést, že řízením navržená napětí  $u$  nejdou přímo do motoru, ale slouží pouze jako referenční hodnoty pro napájecí zdroj. Kontrolu nad napětím na vstupu do motoru tedy nemáme.

#### 2.1.3 Bezsenzorové řízení

Dále se v textu hovoří o *bezsenzorovém řízení*. Pod tímto pojmem je vždy bezvýhradně myšleno řízení, které nevyužívá senzorů k měření mechanických veličin. Elektrické veličiny jsou měřeny vždy.

## 2.2 Senzorové metody

### 2.2.1 Senzory

Nejpřímochařejším přístupem pro určování mechanických veličin je osazení stroje senzory. Často se může jednat o pulzní snímače na principu vhodného kódu [18]. Další možností je využití Hallových senzorů [15]. Využití senzorů přináší obecně mnoho nevýhod. Přidává do zařízení další části a tím zvyšuje jeho cenu i poruchovost. Je třeba řešit jeho připojení k motoru a vodiče pro sběr dat. Řízení využívající senzory je méně robustní a v případě selhání senzoru ztrácíme nad strojem kontrolu. To může být nežádoucí obzvláště, je-li motor využíván současně i jako brzda [31].

Je tedy snaha se užití senzorů vyhnout a k určování polohy a otáček rotoru využít jiných, *bezsenzorových*, metod.

### 2.2.2 Rezolvery

Podle [18] a [11] se jedná o v praxi často využívaná zařízení k vyhodnocení úhlu natočení rotoru PMSM. Rezolver je speciální servomechanismus, v podstatě střídavý stroj. Pracuje na principu polohového transformátoru. Na rotoru má umístěné bezkontaktně napájené budící vinutí (primární vinutí transformátoru). Na statoru dvě vinutí posunutá o  $90^\circ$  (představují sekundární vinutí). Zařízení je napájeno vysokofrekvenčním napětím okolo  $5 - 10kHz$  o malé amplitudě cca  $5V$ . Velikosti napětí indukovaných ve statorových vinutích jsou závislé na úhlovém natočení rotoru ( $\sin$  a  $\cos$ ). To následně může být získáno například pomocí fázového závěsu.

Rezolvery jsou robustní a vyhodnocují přesně úhel natočení, toho se využívá například v robotice. Je však třeba složitějších obvodů, pro samotné vyhodnocení. Velkou nevýhodou ale je, že se jedná o přídavné zařízení a s tím jsou spojeny problémy již zmiňované u senzorů.

Dále se ještě nabízí otázka, proč místo užití rezolveru přímo nepoužít vysokofrekvenční signál v samotném PMSM v rámci některé z injektážních metod.

## 2.3 Zpětné elektromotorické síly

Využití zpětné elektromotorické síly (*back electromotiric force, back-EMF*) je metoda, kdy informaci o úhlu natočení a otáčkách rotoru získáváme z indukovaného napětí. Princip je v podstatě velmi jednoduchý a nejlépe je vidět na rovnicích pro proudy v souřadnicích  $\alpha-\beta$ , které představují přímý vztah mezi řízením systému na vstupu a měřenými výstupy:

$$\begin{aligned}\frac{di_\alpha}{dt} &= -\frac{R_s}{L_s}i_\alpha + \boxed{\frac{\psi_{pm}}{L_s}\omega \sin \vartheta} + \frac{u_\alpha}{L_s}, \\ \frac{di_\beta}{dt} &= -\frac{R_s}{L_s}i_\beta + \boxed{-\frac{\psi_{pm}}{L_s}\omega \cos \vartheta} + \frac{u_\beta}{L_s},\end{aligned}$$

kde právě zarámované členy odpovídají indukovaným napětím a je z nich možno získat hodnoty  $\vartheta$  a  $\omega$ . V ideálním případě by stačilo pouze členy extrahovat  $e_\alpha = \frac{\psi_{pm}}{L_s}\omega \sin \vartheta$  a

$e_\beta = -\frac{\psi_{pm}}{L_s}\omega \cos \vartheta$  a vypočítat

$$\begin{aligned}\vartheta &= \arctan\left(-\frac{e_\alpha}{e_\beta}\right), \\ |\omega| &= \frac{L_s}{\psi_{pm}}\sqrt{e_\alpha^2 + e_\beta^2}.\end{aligned}$$

## Komplikace

Ve skutečnosti ale postup není tak jednoduchý. Jednak je třeba ještě vyřešit problém se znaménkem  $\text{sign } \omega$ , protože uvedené rovnice jsou symetrické na substituci  $(\omega, \vartheta) \longleftrightarrow (-\omega, \vartheta + \pi)$ .

Dále do systému vstupuje šum a při malém odstupu signálu od šumu ( $S/N$ ) bude výpočet výše značně nepřesný. To také souvisí dalším, největším, problémem tohoto přístupu. Zatímco amplitudu šumu uvažujeme neměnnou, amplituda indukovaných napětí je přímo závislá na otáčkách stroje  $\omega$ . A tedy při nízkých, nebo dokonce nulových, otáčkách tato metoda naprosto selhává. Tento případ je o to závažnější, že se s ním musíme vyrovnat při každém rozjezdu stroje. Úhel natočení  $\vartheta$  je tedy v tomto případě nepozorovatelný stav. Navíc nemůžeme předpokládat žádnou počáteční hodnotu, protože nám s rotorem mohl otočit nějaký vnější zásah, popřípadě mohl oddriftovat. Je tedy vhodné předpokládat počáteční natočení  $\vartheta_0$  jako náhodnou veličinu s rovnoměrným rozdělením v intervalu  $(-\pi, \pi)$ . Příkladem toho, jaké výsledky můžeme dosáhnout, když počítáme s očekávanou hodnotou  $\vartheta_0 = 0$ , zatímco skutečná hodnota je jiná zobrazuje obrázek 2.1. Jedná se o jednoduchý příklad odhadování stavu pomocí rozšířeného Kalmanova filtru, v tomto případě neuvažujeme šum. Zde však bylo použito odhadování stavových veličin již běžícího systému, který je řízen regulátorem využívajícím přesnou informaci o stavu. Získaný odhad se tedy nevyužíval pro řízení. Když bychom řídili na základě odhadu stavu, tj. přidali do systému zpětnou vazbu, výsledek by se nepatrně zlepšil viz obrázek 2.2.

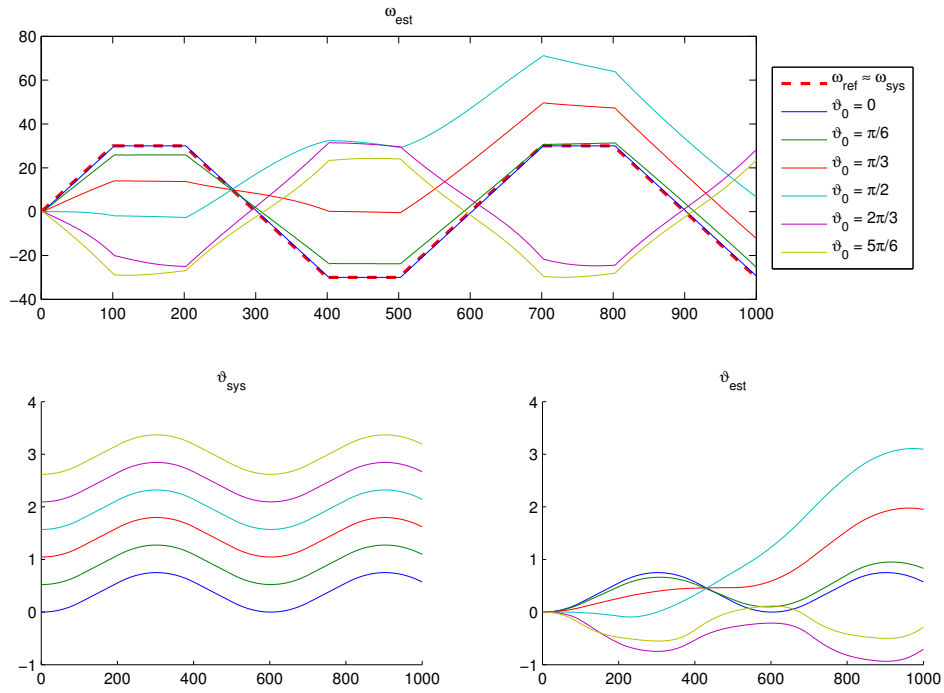
### 2.3.1 Metody

V praxi se pro určování parametrů z indukovaných napětí dle [11] nejčastěji používají nelineární pozorovatelé nebo adaptivní řízení s referenčním modelem (MRAC). Nejčastěji užívaným nelineárním pozorovatelem je pak rozšířený Kalmanův filtr (EKF). Přístupy založené na EKF lze nalézt například v [6, 5, 4].

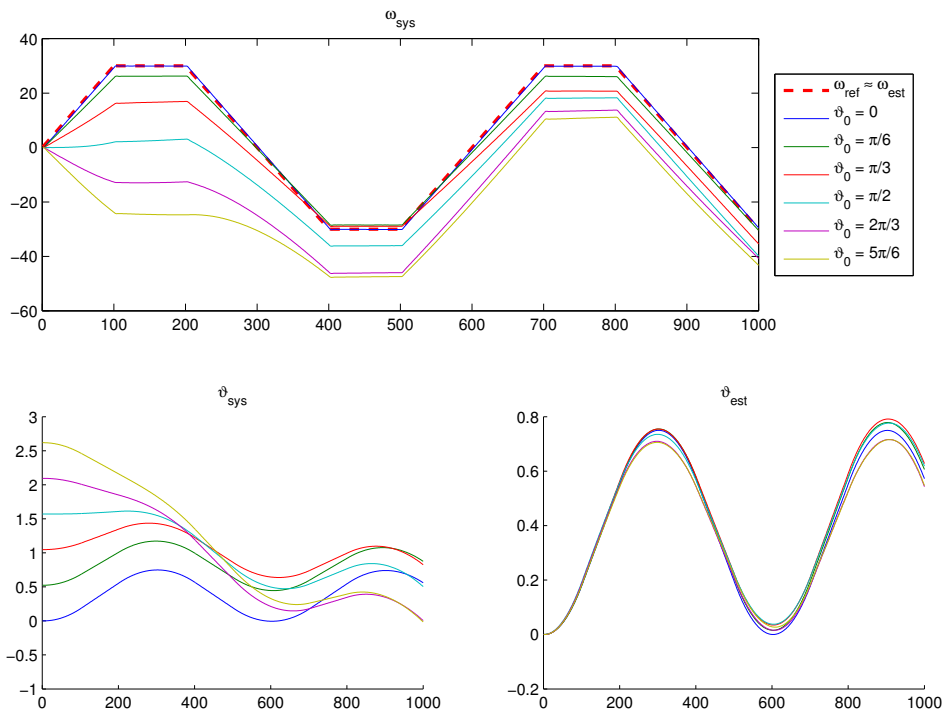
V [4] představují bezsenzorové řízení založené na EKF estimátoru ve spojení s PI regulátory. To nepotřebuje znát počáteční natočení rotoru a zátěžný moment. PI regulátor napětí lze nastavit se zamčeným rotorem a je řešen i problém s rozpoznáním  $\text{sign } \omega$ . Článek [5] je také zaměřen na využití EKF, nyní však v případě IPMSM. Návrh je komplikovanější v důsledku anizotropie stroje, autoři se jí však snaží využít k vylepšení výkonu systému.

Dále kromě EKF je možno použít například klouzavého pozorovatele (*sliding mode observer*, SMO), jeho iterativní verzi využívají v [13]. V [28] využívají také řízení založené na klouzavém pozorovateli, kde si ale navíc při nízkých otáčkách  $\omega \approx 0$  pomáhají injek-

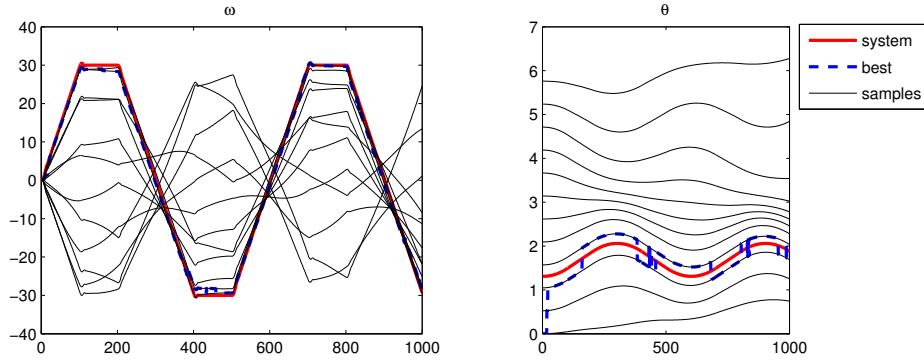




Obrázek 2.1: Výsledek odhadování stavu pomocí EKF, který předpokládá počáteční hodnotu  $\vartheta_0 = 0$ , zatímco skutečná hodnota je jiná (viz legenda). Nahoře odhady otáček  $\omega_{est}$  (červená přerušovaná čára značí referenční hodnotu  $\bar{\omega}$  téměř přesně sledovanou systémem s řízením se znalostí stavu, tj.  $\bar{\omega} \approx \omega_{sys}$ ). Vlevo dole skutečné hodnoty úhlu natočení  $\vartheta_{sys}$  a vpravo dole estimované hodnoty  $\vartheta_{est}$ .



Obrázek 2.2: Výsledek odhadování a řízení stavu pomocí EKF, který předpokládá počáteční hodnotu  $\vartheta_0 = 0$ , zatímco skutečná hodnota je jiná (viz legenda). Nahoře průběhy skutečných otáček systému  $\omega_{sys}$  (červená přerušovaná čára značí referenční hodnotu  $\bar{\omega}$  téměř přesně sledovanou řízením z estimátoru, tj.  $\bar{\omega} \approx \omega_{est}$  pro všechny volby  $\vartheta_0$ ). Vlevo dole skutečné hodnoty úhlu natočení  $\vartheta_{sys}$  a vpravo dole estimované hodnoty  $\vartheta_{est}$ .



Obrázek 2.3: Grafy znázorňují průběh otáček  $\omega$  a úhlů natočení systému  $\theta$ , kdy je k odhadování stavu použito 12 současně běžících modelů, z nichž je v každém kroku vybírán nejlepší na základě shody s výstupem (měřené proudy) skutečného systému. Systém je řízen ze stavu, aby co nejlépe sledoval požadovanou hodnotu otáček, jeho počáteční úhel natočení je  $\vartheta_0 = \frac{5}{12}\pi$ . Počáteční  $\vartheta_0$  odhadovacích modelů jsou rovnoměrně rozloženy v intervalu  $(-\pi, \pi)$ .

továním stejnosměrného proudu do  $d$  osy. Nevyužívají však anizotropií ani nijak zvlášť neanalyzují injektovaný signál, tento přístup tedy v textu nezařadíme mezi injektáže.

Pod metody využívající informaci ze zpětné elektromagnetické síly, můžeme zařadit ještě mnoho dalších, které možná na první pohled do této kategorie nespádají. Především se jedná o metody snažící se nějakým způsobem odstranit šum a tedy zvýšit rozlišovací schopnost indukovaných napětí. Opět zde narážíme na problém, že nefungují při  $\omega \equiv 0$ . Jedná se o různé podoby odšumovacích filtrů, tedy filtrů typu dolní propust (low-pass). V časové oblasti můžeme použít například klouzavé průměry (moving averages - MA) nebo jejich váženou verzi. Ve frekvenční oblasti lze užít (klouzavé) diskrétní Fourierovy transformace, a buď odstranit vyšší frekvence, nebo si vybrat jen nějakou nízkou. Tím však nezískáváme o moc navíc, protože 0. harmonická odpovídá v podstatě průměru, další harmonické pak vhodně váženému průměru.

Za zmínku ještě stojí další skupina metod využívající více paralelně běžících odhadů z nichž vybírá jeden, nějakým způsobem optimální. Takovou metodou je například sekvenční Monte Carlo metoda (Particle Filter).

Dalším příkladem by mohlo být více paralelně běžících modelů, z nichž se vybere ten, jehož výstup nejlépe odpovídá výstupu skutečného systému. Nedostatkem těchto přístupů je poměrně velká výpočetní náročnost, přesto ale poskytují relativně dobré výsledky. Příkladem může být obrázek 2.3 zachycující výsledek 12 současně běžících modelů s různým počátečním odhadem  $\vartheta_0$  rovnoměrně rozloženým v intervalu  $(-\pi, \pi)$ . Skutečná počáteční hodnota natočení rotoru systému je  $\vartheta_0 = \frac{5}{12}\pi$ .

### 2.3.2 Další vlastnosti

Metody využívající zpětnou elektromotorickou sílu jsou obvykle založeny na modelu a je tedy důležitá znalost parametrů stroje. Bylo by tedy dobré najít přístupy, které na parametrech nezávisí, popřípadě které jsou odolné na jejich změnu. To se daří u mechanických parametrů stroje, jako je zátěžný moment například v [5, 4].

Ve vyšších otáčkách poskytuje tento přístup dobré výsledky. Proto je součástí hybridních metod, které kombinují využití zpětné elektromotorické síly a injektaž.

### 2.3.3 Rozšířený Kalmanův filtr

Pro úplnost je zde uvedena i základní formulace v textu často zmiňovaného rozšířeného Kalmanova filtru. Typicky je algoritmus standartního Kalmanova filtru používán jako pozorovatel lineárního systému. Je však možno jej zobecnit i pro nelineární systémy a pak hovoříme o rozšířeném Kalmanově filtru (Extended Kalman Filter, EKF). Zobecnění je založeno na jednoduché myšlence, kdy původní nelineární systém linearizujeme v každém časovém kroku v okolí odhadu, střední hodnoty a kovariance. Popis standartního Kalmanova filtru je možno nalézt v [1]. Následující popis rozšířeného Kalmanova filtru je převzat z [32]:

#### Modelový systém

Předpokládejme dynamický systém popsany rovnicemi

$$\begin{aligned}x_t &= f(x_{t-1}, u_{t-1}, w_{t-1}), \\z_t &= h(x_t, v_t),\end{aligned}$$

pro  $t = 1, \dots, T$ , kde  $x_t$  je vektor stavu,  $u_t$  vektor řízení,  $z_t$  vektor pozorování (měření) a vektory  $v_t$  a  $w_t$  představují na sobě vzájemně nezávislý Gaussovský bílý šum s nulovou střední hodnotou a kovariančními maticemi  $R_t$  a  $Q_t$  v tomto pořadí; obecně nelineární funkce  $f$  představuje funkci systému a  $h$  funkci měření a předpokládáme je známé.

Označme nyní  $A$  Jacobiho matici parciálních derivací  $f$  dle  $x$  v bodě odhadu, tedy  $(A_t)_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\hat{x}_{t-1}, u_{t-1}, 0)$ . Obdobně  $W$  představuje  $(W_t)_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial w_j}(\hat{x}_{t-1}, u_{t-1}, 0)$ , kde  $\hat{x}_t$  reprezentuje aposteriorní odhad stavu  $x_t$  (na základě předcházejících  $t$  kroků). Analogicky pro funkci  $h$  označme  $(H_t)_{ij} = \frac{\partial h_i}{\partial x_j}(\tilde{x}_t, 0)$  a  $(V_t)_{ij} = \frac{\partial h_i}{\partial v_j}(\tilde{x}_t, 0)$ , kde  $\tilde{x}_t$  představuje aproximaci stavu vypočtenou z odhadu bez šumu  $\tilde{x}_t = f(\hat{x}_{t-1}, u_{t-1}, 0)$ .

#### Algoritmus

Samotný algoritmus EKF můžeme rozdělit na dvě fáze. V první označované jako časová oprava (time update) nebo také *predikce* se vypočítá apriorní odhad stavu a kovarianční matice:

$$\begin{aligned}\bar{\hat{x}}_t &= f(\hat{x}_{t-1}, u_{t-1}, 0), \\ \bar{P}_t &= A_t P_{t-1} A_t^T + W_t Q_{t-1} W_t^T.\end{aligned}$$

Ve druhé části označované jako oprava měření (measurement update) neboli *korekce* pak získáme aposteriorní odhad stavu  $\hat{x}_t$  a kovarianční matice  $P_t$ :

$$\begin{aligned} K_t &= \bar{P}_t H_t^T (H_t \bar{P}_t H_t^T + V_t R_t V_t^T)^{-1}, \\ \hat{x}_t &= \bar{\hat{x}}_t + K_t (z_t - h(\bar{\hat{x}}_t, 0)) \\ P_t &= (I - K_t H_t) \bar{P}_t. \end{aligned}$$

Pro úplnost je ještě třeba dodat počáteční odhady  $\hat{x}_0$  a  $P_0$ .

## 2.4 Injektáže

Injektážemi označujeme v textu metody, které využívají přídavného signálu k detekci anizotropií stroje a usnadňují určení jeho jinak obtížně pozorovatelných stavů, především úhlu natočení  $\vartheta$ . Anizotropie lze rozdělit do dvou hlavních kategorií. První jsou vlastní magnetické výčnělky (*saliency*) rotoru, ty jsou charakteristické především pro IPMSM. Do druhé kategorie pak spadají lokální anizotropie vzniklé saturací magnetickým tokem, typické pro SMPMSM. Signál je přiváděn na vstup stroje spolu s řízením. Zpravidla je využíván vysokofrekvenční signál, aby docházelo k co možná nejmenšímu narušení průběhu samotného řízení. Tyto metody jsou ale ve většině případů založeny na nějakém „speciálním“ jevu (anizotropii), v tom smyslu, že jej v základních rovnicích nemáme. V reálném zařízení se samozřejmě vyskytují.

Nejobvyklejším přístupem je, že anizotropie je v podstatě reprezentována rozdílnými indukčnostmi v osách  $d$  a  $q$ , tedy  $L_d \neq L_q$ . Pro IPMSM s permanentními magnety uvnitř rotoru toto platí relativně velmi dobře. V případě SMPMSM je však situace horší, protože rozdíl  $L_q - L_d$  je velmi malý, v krajním případě dokonce nulový. Za předpokladu  $L_d \neq L_q$  lze této vlastnosti využít k určení polohy (úhlu natočení) rotoru  $\vartheta$  pomocí injektování vhodného testovacího signálu do stroje. Obvykle se využívá vysokofrekvenční signál o frekvenci v řádu stovek  $Hz$ . Existují však i injektáže využívající nízkofrekvenční signály.

### 2.4.1 Základní postup užití injektáže

Injektáž je aplikována jako vysokofrekvenční napěťový harmonický signál o frekvenci přibližně  $500 Hz$ . Ten je injektován do estimované osy  $d$  spolu s řídicím napětím. Následně je získána v  $q$  složce proudu informace o úhlu natočení  $\sin 2\hat{\vartheta}$ . Jedná se o obálku amplitudově modulovanou na nosné frekvenci. Demodulace je provedena vynásobením vysokofrekvenčním nosným signálem a následným užitím low-pass filtru. Je však třeba upozornit na nutnost předpokladu  $L_d \neq L_q$ , protože amplituda  $\sin 2\hat{\vartheta}$  závisí mimo jiné přímo úměrně na rozdílu indukčností  $L_q - L_d$ .

### 2.4.2 Metody

Tato základní metoda je užívána například v [11, 3]. Dále pak v [12], kde se využívá principu, kdy v důsledku magnetického toku permanentních magnetů je syceno jádro vinutí kolem  $q$  osy. To vytváří magnetickou nepravidelnost v motoru závislou na poloze rotoru.

Tato nepravidelnost je následně detekována injektovaným vysokofrekvenčním napětím. Výhodou této metody je, že je přímo navrhována pro užití v SMPMSM. Vysokofrekvenční napěťový signál je opět injektován do estimované  $d$  osy, informace o poloze rotoru je získána z proudu v ose  $q$  násobením a low-pass filtrem.

V článku [2] se zabývají srovnáním dvou metod injektáží. Zaměřují se jak na IPMSM, který má větší rozdíl indukčností  $L_q - L_d$ , tak i na SMPMSM. První metoda označovaná jako „pulzující napěťový vektor“ je v podstatě shodná s injektážní technikou z minulého odstavce. Oproti tomu druhý způsob, nazývaný jako „rotující napěťový vektor“, užívá injektáž v souřadnicích  $\alpha - \beta$ . Informaci o úhlu natočení, respektive chybě odhadu úhlu natočení je pak získána násobením a následnou aplikací high-pass filtru. Opět ale platí, že získaná informace je úměrná rozdílu indukčností  $L_q - L_d$ . Dále je v článku provedeno srovnání obou metod na oba typy motorů, kdy je užit stejný stator a měněny rotory (SMPMSM a IPMSM). Mezi injektážními metodami nebyl shledán žádný zásadnější rozdíl. Rozdíly se projeví spíše při použití stejné metody na různé motory, to souvisí s jejich magnetickými vlastnostmi, v tomto textu se tímto však zabývat nebudeme. Srovnáním zmiňovaných dvou metod se zabývají i v [14], zaměřují se však na IPMSM.

Články [16, 17] představují injektážní metodu k detekci anizotropií, která nepotřebuje znát parametry stroje. V případě [17] se navíc snaží kompenzovat negativní vliv invertoru, především jev označovaný jako *dead-time effect*. Díky tomu jsou schopni detekovat i malé nepravidelnosti typické pro SMPMSM. Je užíván vysokofrekvenční napěťový signál o frekvenci okolo  $2kHz$ . Injektovaný signál je složením dvou signálů rotožících proti sobě. V případě špatného odhadu úhlu  $\hat{\vartheta} \neq \vartheta$  je vzniká aditivní vysokofrekvenční signál v proudech, ze kterého může být tato chyba získána pomocí pozorovatele (*Tracking Observer*).

Zajímavou techniku představují v [24], kde vypočítají absolutní polohu rotoru v klidu. Metoda funguje i pro SMPMSM a je založena na injektování vhodných napěťových pulzů do vinutí každé z fází. Následně dochází k částečnému nasycení statoru, ze kterého je možno spočítat absolutní polohu rotoru i bez znalosti parametrů stroje.

Další velmi zajímavý přístup je prezentován v [20]. Tato metoda nevyužívá anizotropií rotoru, ani výčnělků, místo toho je založena na anizotropii samotných permanentních magnetů. Z tohoto důvodu může být dobře využita při estimaci PMSM, kde ostatní metody selhávají, například z důvodu  $L_q = L_d$ . K jejich detekci je ale třeba využít velmi vysokých frekvencí, řádově  $100 - 500kHz$ . Optimální hodnotu frekvence je navíc třeba naladit pro konkrétní typ magnetu. Tento přístup vypadá velmi slibně, ale jak autoři sami uvádějí, je tato metoda nová a vyvstává kolem ní ještě mnoho nezodpovězených otázek.

## 2.5 Hybridní metody

Hybridními metodami v textu označujeme v podstatě vhodnou kombinaci předchozích dvou zmiňovaných přístupů. Techniky založené na zpětné elektromotorické síle fungují relativně velmi dobře, selhávají ale při nízkých a nulových otáčkách. Naopak užití in-

jektáží je vhodné pro nízké a nulové otáčky, zatímco ve vyšších rychlostech způsobuje nežádoucí rušení. Z tohoto důvodu je snaha obě metody vhodným způsobem zkombinovat a využít předností obou. Základní idea je tedy jednoduchá. Dokud se pohybujeme v nízkých otáčkách, využíváme odhadů založených na injejtáží, při vyšších otáčkách injejtáž vypneme, aby nezpůsobovala nežádoucí zásahy a užíváme již jen odhadů získaných ze zpětné elektromotorické síly.

Tento postup je použit například v [22], kdy jako estimátor používají adaptivního pozorovatele s referenčním modelem, který je pro nízké otáčky doplněn injejtáží v podstatě v základním návrhu popsáném v předcházející části. Důležitou součástí těchto metod je způsob, jakým se vyřeší „bezproblémový“ přechod z jednoho estimátoru na jiný. V [26] je to například řešeno tak, že užívají estimátor rotorového toku založený na indukovaných napětích, který je funkční pořád. V nízkých otáčkách je pak doplňován injejtáží, ta s rostoucími otáčkami postupně vymizí. Obdobně v [21] je užit estimátor založený na napěťovém modelu, v nízkých otáčkách je přidána vysokofrekvenční injejtáž. Ta s rostoucími otáčkami lineárně klesá a navíc je nad určitou mezní rychlostí úplně vypnuta.

Hybridní metody jsou samozřejmě dále vylepšovány. Například v [23] uzpůsobují standardní hybridní metodu, zejména její injejtážní část, aby fungovala i s invertorem vybaveným na výstupu  $LC$  filtrem. Toho se užívá zejména k odstranění problému ve střídavých strojích v důsledku napájení nesinusovým napětím z invertoru s pulzně šířkovou modulací.

## 3 Řízení

Jak již bylo zmíněno výše pro správné řízení je nezbytně nutná znalost polohy natočení rotoru  $\vartheta$  a otáček rotoru  $\omega$ . Jak tyto veličiny, respektive jejich odhady  $\hat{\vartheta}$  a  $\hat{\omega}$ , získat bylo uvedeno v předchozí části. Předpokládáme tedy, že známe odhad stavu systému  $(\hat{i}_\alpha, \hat{i}_\beta, \hat{\omega}, \hat{\vartheta})$  a nyní se zaměříme na to, jak systém správně řídit, tedy naplnit požadavky zadaných kritérií. V textu budeme předpokládat následující požadavky na řízení:

- dosažení požadovaných otáček – snaha aby skutečné otáčky systému  $\omega$  co nejpřesněji sledovaly zadaný referenční signál požadovaných otáček  $\bar{\omega}$
- omezení na vstupy – řízené veličiny jsou napětí na vstupu do systému, ty z fyzikálních důvodů nemohou být libovolně velké, protože napěťový zdroj je schopen poskytnout pouze určité maximální napětí  $U_{max}$ , tedy na řídicí napětí je kladen požadavek  $|u_{\alpha,\beta}| \leq U_{max}$

Než přistoupíme k popisu konkrétních řídicích algoritmů je důležité upozornit na jeden problém ve zde užitém postupu. Obecně rozdělení algoritmu na estimační a řídicí část při současném zachování optimality je možné pouze pro lineární systémy. Uvažovaný systém synchronního stroje zřejmě lineární není. Navrhování estimace a řízení současně v jednom algoritmu by však bylo v tomto případě velmi složité a proto se dopouštíme zmiňovaného zjednodušení. Tento problém lze dále řešit užitím duálních metod, které řízení a estimaci vzájemně provazují a v ideálním případě by vedly k nalezení optimálního řešení.

Obecně lze následující řídicí algoritmy uvažovat buď v souřadném systému  $\alpha - \beta$  nebo v  $d - q$ . Řídicí napětí dodáváme do stroje, respektive jako referenci do zdroje napájecího samotný stroj, v souřadnicích  $\alpha - \beta$ . Proto se návrh v této soustavě jeví jako přímočařejší.

Na druhou stranu ale většina dále zmiňovaných metod užívá linearizace. Zřejmě již z tvaru rovnic v soustavách  $\alpha - \beta$  viz 1.5.2 a  $d - q$  viz 1.5.1 je vidět, že linearizací rovnic v  $d - q$  souřadnicích se dopouštíme menší chyby. Jedinými nelineárními členy vystupujícími v těchto rovnicích jsou tvaru  $\mp i_{q,d}\omega$  v rovnicích pro  $i_d$  a  $i_q$ . Když uvážíme, že otáčky  $\omega$  se v porovnání s proudy  $i_{d,q}$  mění velmi málo a jsou tedy téměř konstantní, linearizace způsobí velmi malou chybu. Oproti tomu v rovnicích v  $\alpha - \beta$  souřadném systému vystupují nelineární členy typu  $\omega \sin \vartheta$ ,  $\omega \cos \vartheta$ ,  $i_\alpha \sin \vartheta$ ,  $i_\beta \cos \vartheta$ . Linearizace v nich vystupujících goniometrických funkcí je velmi nepřesná a v důsledku relativně rychlé změny úhlu natočení  $\vartheta$  není možné ani žádné účinné zjednodušení.



## 3.1 Základní řídicí strategie

### 3.1.1 PI regulátor

Naprostá většina dnes využívaných a i v literatuře popisovaných řízení pro PMSM, ale i pro motory obecně, je založena na PI regulátorech.

PI (proporcionálně integrační) regulátor je jednoduchý systém, který v sobě kombinuje dvě základní části: Proporcionální, což je v podstatě zesilovač a integrální reprezentovanou integrátorem. V tomto systému se vyskytují dvě konstanty  $K_p$  a  $K_i$ , které je třeba vhodně nastavit. Základní implementace je následovná:

$$x_t = \text{PI}(e_t, K_p, K_i) = K_p e_t + K_i \int_0^t e_\tau d\tau.$$

Diskrétní verze pak

$$x_t = \text{PI}(e_t, K_p, K_i) = K_p e_t + K_i \sum_{k=0}^t e_k.$$

Tento regulátor je výhodné užít v případě, kdy chceme vyregulovat  $e_k$  obvykle reprezentující odchylku od požadované hodnoty na nulu. V některých případech bychom si vystačili s proporcionální složkou, integrální složka však dodává lepší stabilitu a schopnost odstranit konstatní regulační odchylku. Cenou za to je pomalejší konvergence.

Samotné PI regulátory však představují pouze realizaci nějakého konkrétního algoritmu. Nejčastěji používanými řídicími algoritmy, a to nejen pro PMSM, ale pro střídavé stroje obecně, jsou následující tři.

### 3.1.2 Skalární řízení

Skalární řízení je často využíváno v asynchronních strojích, je ale možné jeho užití i pro PMSM. Detailněji je popsáno například v [30]. Velkou výhodou je, že se jedná v podstatě o bezsenzorový návrh řízení, funguje na principu nezpětnovazebního řízení (open loop). Nevýhodou je pak závislost rychlosti na zátěžném momentu a horší dynamické vlastnosti.

Toto řízení je také označováno jako  $V/f$  řízení, protože regulovanou veličinou je právě poměr napětí a frekvence. Snahou řízení je udržet poměr napětí/frekvence konstantní. Úhlová rychlost rotoru může být určena nepřímo výpočtem z frekvence napájecího napětí. Tato hodnota může být považována za hodnotu skutečných otáček stroje, pokud zátěžný moment nepřesáhne kritickou hodnotu. Pro řízení ale skutečnou hodnotu otáček stroje znát nepotřebujeme, algoritmus totiž pracuje následovně:

Z požadovaných otáček se určí frekvence  $f$ , ta slouží jako referenční signál pro regulátor. Ten pak řídí poměr napětí a frekvence  $V/f$  tak, aby byl konstantní. Na jeho výstupu získáme amplitudu napětí  $V$ . Řídicí napětí pro PMSM v  $\alpha - \beta$  souřadnicích je pak ve tvaru

$$\begin{aligned} u_\alpha &= V \cos(2\pi ft) \\ u_\beta &= V \sin(2\pi ft) \end{aligned}$$

### 3.1.3 Vektorové řízení

Jedná se asi o nejčastěji využívaný řídicí algoritmus. Je užíván pro řízení v kombinaci s estimátorem založeným na zpětné elektromotorické síle, injektáži i v hybridních verzích v naprosté většině citovaných textů z části 2.

Dle [30] vektorové řízení odstraňuje většinu nevýhod skalárního řízení a v porovnání s ním poskytuje velmi dobrý výkon. Jedná se o řízení zpětnovazební a umožňuje samostatné řízení toku i momentu. Uvažujeme reprezentaci stroje v  $d - q$  souřadném systému. Vektorové řízení je zpětnovazební a je tedy potřeba znát odhady úhlu natočení  $\hat{\vartheta}$  a otáček  $\hat{\omega}$  rotoru stroje. Základní struktura regulátoru pak využije zpětné vazby z otáček, kdy první regulátor reguluje odchylku estimovaných otáček  $\hat{\omega}$  od požadované referenční hodnoty  $\bar{\omega}$  na nulu. Výstupem je pak referenční proud  $\bar{i}_q$ . Referenční proud  $\bar{i}_d$  volíme nulový, aby bylo dosaženo maximálního momentu. Tento postup můžeme ilustrovat na diskretizované rovnici pro otáčky

$$\omega_{t+1} = \left(1 - \frac{B}{J}\Delta t\right)\omega_t + \Delta t \frac{k_p p_p^2 \psi_{pm}}{J} i_{q,t} - \frac{p_p}{J} T_L \Delta t,$$

přičemž zanedbáváme poslední člen se zátěžným momentem. Požadované hodnoty bychom chtěli dosáhnout v následujícím kroku a tedy získáme následující tvar rovnice

$$\bar{\omega} - k_1 \omega = k_2 i_q.$$

$\bar{i}_q$  tedy můžeme získat pomocí PI regulátoru s vhodnými konstantami

$$\bar{i}_q = \text{PI}(\bar{\omega} - \omega, K_{p,i}, K_{i,i}).$$

Referenční hodnoty proudů jsou následně porovnány s estimovanými hodnotami  $i_d$  a  $i_q$  a jejich odchylky jsou regulovány na nulu. Toto je provedeno pro každou složku zvlášť a výstupem jsou řídicí napětí v souřadnicích  $d - q$ , tedy  $u_d$  a  $u_q$ . Postupujeme obdobně s rovnicemi proudů

$$\begin{aligned} i_{d,t+1} &= \left(1 - \frac{R_s}{L_s}\Delta t\right) i_{d,t} + \Delta t \cdot i_{q,t} \omega_t + \frac{\Delta t}{L_s} u_{d,t}, \\ i_{q,t+1} &= \left(1 - \frac{R_s}{L_s}\Delta t\right) i_{q,t} - \Delta t \cdot i_{d,t} \omega_t - \frac{\psi_{pm} \Delta t}{L_s} \omega_t + \frac{\Delta t}{L_s} u_{q,t}, \end{aligned}$$

kde prozatím zanedbáme členy s  $\pm \Delta t \cdot i_{q,d} \omega$ , dále pak člen  $-\frac{\psi_{pm} \Delta t}{L_s} \omega_t$  a chceme dosáhnout požadovaných hodnot  $\bar{i}_d = 0$  a  $\bar{i}_q$ , které byly získány v předchozím kroku. To vede na následující tvar

$$\begin{aligned} -k_1 i_d &= k_2 u_d, \\ \bar{i}_q - k_1 i_q &= k_2 u_q. \end{aligned}$$

Napětí  $u_d$  a  $u_q$  můžeme tedy získat pomocí dvou PI regulátorů ve tvaru

$$\begin{aligned} u_d &= \text{PI}(-i_d, K_{p,u}, K_{i,u}), \\ u_q &= \text{PI}(\bar{i}_q - i_q, K_{p,u}, K_{i,u}). \end{aligned}$$

Následně je ještě vhodné provést korekce v důsledku zanedbaných členů a to ve tvaru

$$\begin{aligned} u_d &= u_d - L_s \bar{i}_q \bar{\omega}, \\ u_q &= u_q + \psi_{pm} \bar{\omega}. \end{aligned}$$

### 3.1.4 Přímé řízení momentu

Přímé řízení momentu (DTC z Direct Torque Control) dle [30, 19] se užívá, když je potřeba vysoký výkon vzhledem k dynamice momentu. Jak již napovídá název, je řízen přímo moment stroje. Základní princip je jednoduchý. Kruhová trajektorie statorového toku se rozdělí na šest symetrických částí. Velikosti vektorů statorového toku a elektromagnetického momentu v souřadnicích  $\alpha - \beta$  je pak držena v předem stanovených mezích prostřednictvím vhodného spínání jedné ze šesti kombinací na invertoru.

Touto metodou text již dále nezabývá a je zde uvedena jen pro úplnost.

## 3.2 Lineární kvadratické řízení

Řízení *LQG* (z Linear-Quadratic-Gaussian) je primárně navrženo pro řízení lineárních systémů s kvadratickou ztrátovou funkcí a Gaussovským šumem. Existují však různé modifikace i pro nelineární systémy. Algoritmus *LQG* často využívá jako pozorovatele Kalmanův filtr. Základní formulace podle [1] je následovná:

Uvažujme lineární systém

$$x_{t+1} = A_t x_t + B_t u_t + w_t, \quad t = 0, 1, \dots, T-1,$$

kde obecně vektorová veličina  $x_k$  reprezentuje stav systému v časovém kroku  $k$ , veličina  $u_k$  řízení v čase  $k$  a  $w_k$  je Gaussovský bílý šum s nulovou střední hodnotou a známou kovarianční maticí; je uvažován konečný diskrétní časový horizont  $N$  kroků.

Kvadratická ztrátová funkce je

$$\mathbf{E} \left\{ x_N^T Q_N x_N + \sum_{t=0}^{T-1} (x_t^T Q_t x_t + u_t^T R_t u_t) \right\},$$

kde  $\mathbf{E}$  značí očekávanou hodnotu,  $Q_t$  a  $R_t$  jsou penalizační matice stavu systému (splnění požadavků řízení), respektive penalizace vstupů. Při uvažování neúplné informace  $I_t$  o stavu je optimální řízení  $\mu_t^*$  v každém časovém kroku rovno

$$\mu_t^*(I_t) = L_t \mathbf{E} \{ x_t | I_t \},$$

kde matice  $L_t$  je dána rovností

$$L_t = - (R_t + B_t^T K_{t+1} B_t)^{-1} B_t^T K_{t+1} A_t,$$

přičemž matice  $K_t$  získáme rekurzivně z Riccatiho rovnice

$$\begin{aligned} K_T &= Q_T, \\ K_t &= A_t^T \left( K_{t+1} - K_{t+1} B_t (R_t + B_t^T K_{t+1} B_t)^{-1} B_t^T K_{t+1} \right) A_t + Q_t. \end{aligned} \tag{3.1}$$

### 3.2.1 Implementace

Samotná implementace lineárně kvadratického řízení pro PMSM v sobě však nese mnoho komplikací, které je třeba vyřešit. Detailněji budou tyto problémy rozebrány v kapitole 4, zde bude jen stručně nastíněna základní problematika.

Především řídicí matici  $L$  počítáme z Riccatiho rovnice (3.1) zpětnou integrací (diskrétní) v čase a potřebujeme tedy znát budoucí stavy systému. Pro srovnání uveďme například výpočet Kalmanova filtru, kde počítáme duální rovnici integrací vpřed a problém nevzniká. Řešením může být užití „ubíhajícího horizontu“, kdy matici  $L$  navrhujeme na pomocném časovém horizontu, který se posouvá vzhledem k aktuálnímu časovému kroku. S tím je spojená komplikace, jak bude stav systému v budoucích časech vypadat. Je tedy potřeba nějak odhadnout budoucí stav a v něm provést výpočet.

LQ řízení již ze svého názvu předpokládá lineární systém a odvozené rovnice v části 1.5 popisující PMSM nejsou lineární. Je tedy potřeba provést linearizaci a ve spojení s diskretizací se užitím tohoto postupu můžeme dopouštět již značné chyby. Samostatnou otázkou je však i samotná linearizace. Nejdříve je totiž nutné zvolit vhodnou souřadnou soustavu, ve které bude vlastní linearizace provedena. Jak se ukazuje na základě simulací, může to mít značný vliv.

Dalším důležitým krokem je zvážit možnost zanedbání některých méně významných členů. Případně určit které veličiny se mění velmi pomalu v porovnání s ostatními a je možno je považovat téměř za konstantní v průběhu jednoho časového kroku. Při linearizaci totiž dojde k tomu, že zejména matice  $A_t$  bude závislá na časovém kroku  $t$  a tedy ji bude nutné v každém kroku měnit. Kdyby se vhodným zanedbáním členů například podařilo, že by všechny matice systému byly konstantní  $M_t = M$ , bylo by možné z výše popsaných rovnic pro LQ řízení předpočítat řídicí matici  $L$ . To by samozřejmě vedlo ke značnému urychlení výpočtu.

LQ řízení vyžaduje kvadratickou ztrátovou funkci. Problematické jsou v tomto ohledu zejména omezení na vstupy  $|u_{\alpha,\beta}| \leq U_{max}$ . Ty nelze v algoritmu lineárně kvadratického řízení užít přímo a je třeba je nahradit vhodně nastavenou penalizační maticí  $R$ . Dosažení požadovaných otáček lze pak zvládnout relativně snadno přidáním nové stavové proměnné.

Někdy může být vhodné pro lineárně kvadratické řízení omezit změnu řídicích napětí v sousedních časových krocích  $|u_{\alpha,\beta}(t+1) - u_{\alpha,\beta}(t)|$ . Za tímto účelem je ale potřeba provést drobnou modifikaci LQ algoritmu.

Šum ve skutečném stroji samozřejmě neodpovídá modelu Gaussovského bílého šumu, ale jak již bylo uvedeno v části 1.6 budeme tento model šumu pro jednoduchost předpokládat.

## 3.3 Duální řízení

Duální řízení je obvykle využíváno v systémech s neurčitostí, představovanou například neznámými parametry, nepozorovatelnými stavovými veličinami nebo samotnou strukturou systému. Snahou je tuto neurčitost snížit a poskytnout řízení srovnatelné kvality, jako v případě stejného systému bez neurčitosti. Základní princip duálního řízení spočívá

v tom, že obsahuje dvě části: „*opatrnou*“ a „*budící*“. *Opatrná* část, má za cíl pokud možno co nejlépe kontrolovat systém a snažit se dosáhnout optimální shody s požadavky, referenčním signálem. Oproti tomu *budící* část hledá optimální budící signál, který pomáhá co nejlépe určit neznámé veličiny systému. Tyto snahy jdou samozřejmě proti sobě a cílem duálního řízení je nalézt mezi nimi vhodný kompromis.

Většina výše zmiňovaných metod pro řízení a estimaci obecně trpěla dvěma nedostatky, které se snaží duální řízení odstranit. Jednak zcela oddělily řídicí a estimační část, které pak pracovaly nezávisle. Dalším nedostatkem standartních metod je předpoklad, že odhad poskytnutý estimátorem se rovná skutečné hodnotě stavové veličiny. Tento přístup je označován jako *Certainty Equivalence* (CE). Oproti tomu duální řízení předpokládá stavové veličiny jako náhodné veličiny a uchovává si o nich statistickou informaci. Odhad z estimátoru tedy uvažuje například ve tvaru střední hodnoty a variance dané veličiny a předpokládá, že skutečná hodnota se nachází například v konfidenčním intervalu s těmito parametry. Z tohoto pohledu tedy přístup CE předpokládá, že skutečná hodnota je rovna střední hodnotě. Duální řízení tedy narozdíl od ostatních založených na CE principu uvažuje kromě odhadu stavové veličiny i to, jak je tento odhad přesný a tomu také přizpůsobuje řídicí zákroky.

Výše zmíněné důvody ukazují, proč by duální přístup mohl být obzvláště vhodný pro řízení PMSM. Je ale třeba mít na paměti, že duální řízení s sebou nese i značné nevýhody. Jedná se především o značnou výpočetní náročnost. Ta je problematická zejména, když uvažujeme i výpočet v reálném čase. Proto se v textu zaměříme hlavně na nejjednodušší algoritmy duálního řízení, které by tento požadavek mohly naplnit.

### 3.3.1 Formulace problému duálního řízení

Základní formulace problému duálního řízení pro časově diskrétní obecně nelineární systém dle [9] je:

$$\begin{aligned}x(t+1) &= f_t(x(t), p(t), u(t), \xi(t)), \quad t = 0, 1, \dots, T-1, \\p(t+1) &= v_t(p(t), \varepsilon(t)), \\y(t) &= h_t(x(t), \eta(t)),\end{aligned}$$

kde  $x(t)$  je vektor stavu,  $p(t)$  vektor neznámých parametrů,  $u(t)$  vektor řídicích vstupů,  $y(t)$  vektor výstupů systému, vektory  $\xi(t)$ ,  $\varepsilon(t)$  a  $\eta(t)$  představují nezávislý náhodný bílý šum s nulovou střední hodnotou a známým rozptylem, vše je uvažováno v čase  $t$ ;  $f_t(\cdot)$ ,  $v_t(\cdot)$  a  $h_t(\cdot)$  jsou jednoduché vektorové funkce. Hustotu pravděpodobnosti počátečních hodnot  $p[x(0), p(0)]$  předpokládáme známou.

Množinu výstupů a vstupů systému dostupných v čase  $t$  označujeme jako *informační vektor*  $I_t = \{y(t), \dots, y(0), u(t-1), \dots, u(0)\}$ , kde  $t = 1, \dots, T-1$  a  $I_0 = \{y(0)\}$ .

Ztrátová funkce pro optimalizaci řízení má tvar

$$J = \mathbf{E} \left\{ \sum_{t=0}^{T-1} g_{t+1}(x(t+1), u(t)) \right\}, \quad (3.2)$$

kde  $g_{t+1}(\cdot)$  jsou známe kladné konvexní skalární funkce. Očekávaná hodnota  $\mathbf{E}$  je počítána vzhledem k všem náhodným veličinám  $(x(0), p(0), \xi(t), \varepsilon(t), \eta(t))$ , kde  $t = 0, 1, \dots, T-1$ .

Problémem optimálního adaptivního duálního řízení je nalezení takové řídicí strategie  $u(t) = u_t(I_t)$  ze známé množiny přípustných hodnot řízení  $\Omega_t$ , která minimalizuje ztrátovou funkci  $J$  v 3.2.

Optimální řešení tohoto problému může být nalezeno rekurzivně užitím dynamického programování, což vede na následující rovnice:

$$\begin{aligned} J_{T-1}(I_{T-1}) &= \min_{u(T-1) \in \Omega_{T-1}} \mathbf{E} \{g_T(x(T), u(T-1)) \mid I_{T-1}\}, \\ J_t(I_t) &= \min_{u(t) \in \Omega_t} \mathbf{E} \{g_{t+1}(x(t+1), u(t)) + J_{t+1}(I_{t+1}) \mid I_t\}, \end{aligned}$$

pro  $t = T-2, T-3, \dots, 0$ .

### 3.3.2 Stručný přehled duálních metod

Následující stručný přehled duálních metod je založen na přehledových člancích [27, 7] a 3. kapitole knihy [9].

Dříve byly řídicí metody založeny na principu CE a tedy neuvažovaly neurčitost. Odhady jsou při tomto přístupu považovány za skutečné hodnoty parametrů. Hlavním problémem jsou pak velké přestřely při rychlé adaptaci nebo možnost úplně chybného řízení jako například právě u počátečního úhlu natočení rotoru PMSM. A. Feldbaum ve svých raných pracích z 60. let minulého století ukázal, že CE přístup není vždy optimální, naopak je od optimality značně vzdálen. Dále postuloval, dvě hlavní vlastnosti, které by optimální adaptivní systém měl mít: (1) výstup systému opatrně sleduje požadovanou referenční hodnotu a (2) budí (excituje) systém dostatečně, pro urychlení procesu estimace jeho parametrů, tak aby se zlepšila kvalita řízení v budoucích časových krocích.

Formální řešení problému optimálního adaptivního duálního řízení lze nalézt pomocí dynamického programování. Avšak řešení takto vzniklých rovnic není možné numericky a již vůbec ne analyticky ani pro relativně jednoduché případy. Je to způsobeno především problémem s rostoucími dimenzemi. Nemožnost řešit původní problém vedla ke vzniku celé řady metod, které se ho snaží nějakým způsobem zjednodušit. Tyto metody samozřejmě nenaleznou optimální řešení, snaží se ale zachovat hlavní duální rysy, můžeme je rozdělit do dvou hlavních skupin: metody založené na aproximacích (implicitní) a založené na reformulaci problému (explicitní).

Aproximativní metody jsou obvykle složité a výpočetně značně náročné. To vede k volbě hrubějších aproximací, kdy může již dojít ke ztrátě duálních rysů a tedy nedostačujícímu výkonu. Oproti tomu reformulace je více flexibilní a tedy slibnější. Uvažuje speciální ztrátovou funkci s dvěma sečtenými členy. Jeden kontroluje ztrátu v důsledku odchylky od referenční hodnoty a druhý míru nejistoty. Takto vzniklé řízení je jednoduché a výpočetní náročností srovnatelné s CE přístupem. Není však zajištěno trvalé buzení a výkon je opět nedostačující. Je tedy snahou vhodně kombinovat oba zmiňované přístupy a využít výhod obou za současného potlačení jejich nedostatků. Jednou z takových metod například bikriteriální metoda navržená autory [27] založená na sekvenční minimalizaci dvou ztrátových funkcí.

### 3.3.3 Vybrané algoritmy pro duální řízení

#### Bikriteriální metoda

Bikriteriální metoda je založena na relativně jednoduchém principu. Ve snaze splnit obě hlavní vlastnosti duálního řízení (opatrnost a buzení) je ztrátová funkce rozdělena na dvě části, proto se také metoda nazývá bikriteriální. První ztrátová funkce odpovídá takzvanému *opatrnému řízení*, které navrhuje tím menší řídicí zásahy, čím je větší variance neznámých parametrů (proto opatrné). Nesnaží se však primárně tuto varianci nijak snížit. Druhá ztrátová funkce představuje kritérium pro optimální buzení. Tyto dvě ztrátové funkce je třeba současně minimalizovat. Minimalizace těchto dvou funkcí jde ale obecně z podstaty problému proti sobě, navíc optimální budící zásah bude zpravidla neomezeně velký. Proto je zvolen následující postup:

1. nejdříve je nalezeno optimální opatrné řízení
2. dále je vytyčena množina přípustných řešení kolem řízení nalezeného v bodě (1.), například se může jednat o interval
3. druhá ztrátová funkce pro optimální buzení je minimalizována již pouze v rámci množiny přípustných řešení z bodu (2.)

Konkrétní realizace hledání optimálního řízení (minimalizace) pak již závisí na řešeném problému.

#### $\rho$ -aproximace

Jako  $\rho$ -aproximace označujeme suboptimální přístupy k řešení problému duálního řízení, kdy se snažíme aproximovat pravděpodobnostní míru neznámých stavů a parametrů systému. Dle [8, 7, 9] je problematika  $\rho$ -aproximací formulována následovně: Hledání suboptimální řídicí strategie je založeno na minimalizaci modifikované ztrátové funkce

$$J_t(I_t, \rho_t) = \mathbf{E}_{\rho_t} \left\{ \sum_{i=t}^{T-1} g_{t+1}(x(i+1), u(i)) \mid I_k \right\}.$$

V čase  $t$  je řídicí strategie  $u_t(I_t)$  nalezena pomocí aproximace podmíněné hustoty pravděpodobnosti stavů a parametrů systému pro budoucí časové kroky

$$\rho_t = \mathbf{p}[x(t+i), p(t+i) \mid I_{t+i}],$$

pro  $i = 0, 1, \dots, T-t-1$ .

Pro různé volby  $\rho_t$  pak můžeme získat následující přístupy:

- *Řídicí strategie s otevřenou smyčkou* (open-loop, OL) uvažuje systém bez zpětné vazby a optimální řízení je hledáno z apriorní informace o stavech a parametrech systému. Tento zjednodušující předpoklad je ekvivalentní aproximaci

$$\rho_t = \{\mathbf{p}[x(t+i), p(t+i) \mid I_{t+i}] = \mathbf{p}[x(t+i), p(t+i) \mid I_0], i = 0, \dots, T-t-1\}.$$

- *Zpětnovazební řídicí strategie s otevřenou smyčkou* (open-loop feedback, OLF) také uvažuje systém bez zpětné vazby, ale jen pro budoucích časové kroky ( $t + 1$  až  $T$ ), v současném časovém kroku  $t$  zpětnou vazbu uvažuje. Pozorování  $y(t)$  jsou tedy použita k estimaci stavů i parametrů systému, ale pouze v současném časovém kroku  $t$ , v budoucích již ne. Opět lze formulovat pomocí  $\rho$ -aproximace:

$$\rho_t = \{p[x(t+i), p(t+i) | I_{t+i}] = p[x(t+i), p(t+i) | I_t], i = 0, \dots, T-t-1\}.$$

- Pro srovnání zde bude uvedena i aproximace, která vede na již zmiňovaný přístup *Certainty Equivalence* (CE):

$$\begin{aligned} \rho_t &= \{p[x(t+i), p(t+i) | I_{t+i}] \\ &= \delta[x(t+i) - \hat{x}(t+i)] \delta[p(t+i) - \hat{p}(t+i)], i = 0, \dots, T-t-1\}, \end{aligned}$$

kde  $\delta$  značí Diracovu delta funkci a  $\hat{x}(t+i) = \mathbf{E}\{x(t+i) | I_{t+i}\}$ ,  $\hat{p}(t+i) = \mathbf{E}\{p(t+i) | I_t\}$ .

- *Částečný CE přístup* (PCE) je založen na vhodné kombinaci předchozích postupů CE a OLF. Definujme rozšířený stavový vektor jako  $z^T(t) = [x^T(t) \ p^T(t)]$ , tedy jako vektor sdružující původní stav systému a jeho neznámé parametry. Tento vektor následně rozdělíme na dvě části s prázdným průnikem  $z_1(t)$  a  $z_2(t)$ . Nyní aplikujeme na část  $z_1$  zjednodušující předpoklad CE a na část  $z_2$  předpoklad OLF. To odpovídá následující  $\rho$ -aproximaci:

$$\begin{aligned} \rho_t &= \{p[z_1(t+i), z_2(t+i) | I_{t+i}] \\ &= \delta[z_1(t+i) - \hat{z}_1(t+i)] p[z_2(t+i) | I_t], i = 0, \dots, T-t-1\}, \end{aligned}$$

kde  $p[z_1(t+i), z_2(t+i) | I_{t+i}] = p[z(t+i) | I_{t+i}] = p[x(t+i), p(t+i) | I_{t+i}]$ . Samotné rozdělení vektoru  $z$  na dvě části je třeba vyřešit s ohledem na konkrétní strukturu systému, pro který je řízení navrhováno. Vhodnou volbou může být například označit jako  $z_1$  stavové veličiny, které jsou přímo pozorovány. Autoři dále poukazují i na možnost kombinace s bikriteriálním přístupem.

## Řešení LQG problému pomocí teorie her

Výpočetně relativně málo náročné řešení diskrétního LQG problému duálního řízení je představeno v [25]. Na řešení problému se užívá teorie her, kde hledáme optimální znáhodněnou strategii. Výsledkem pak je, že optimální řešení přeformulovaného problému duálního řízení je vážený průměr konečného počtu standartních LQG optimálních regulátorů. Jako váhové faktory jsou brány zobecněné věrohodnostní poměry.

(Popisovaný přístup se jeví z pohledu tohoto textu výhodným ze dvou důvodů. Jednak využívá LQG regulátory, kterými se práce relativně podrobně zbývá, dále pak využívá více modelů, které se také v simulacích pro estimátory ukázaly jako využitelné.)



### 3.3.4 Injektáže a duální řízení

Na injektáže lze z jistého směru pohlížet také jako na duální řízení. Především v sobě kombinují obě žádoucí vlastnosti, opatrnost a buzení. Opatrnost je reprezentována konkrétním použitým regulátorem, který se snaží co nejlépe sledovat cíl řízení. Injektovaný signál pak představuje buzení, které napomáhá k určení parametrů stroje.

V základním návrhu je přidáván vysokofrekvenční signál stále, bez ohledu na okolnosti a tedy tento návrh se příliš nesnaží o nalezení kompromisu mezi opatrným řízením a buzením. Velkou výhodou ale je, že to příliš nevadí, obzvláště při nízkých otáčkách, protože vysokofrekvenční signál má minimální vliv na samotný chod stroje. Současně ale poskytuje relativně dobrý odhad natočení rotoru, jehož kvalita nezávisí na otáčkách, ale pouze na rozdílu induktancí.

Jistý krok směrem k hledání kompromisu mezi opatrností a buzením lze pozorovat u hybridních metod, které buď plynule, nebo jednorázově přepínají mezi dvěma modely, s injektáží a bez. Jeden je určen pro dobrou estimaci a druhý pro nízké ztráty při řízení. To vede k velkému zlepšení, protože přídatný signál je injektován, jen, když je opravdu potřeba.

Hlavním problémem injektáží z hlediska duálního řízení je, že se jedná spíše o „ad hoc“ přístup, který byl navržen s využitím konkrétních vlastností PMSM a pro předem určený účel. Injektovaný vysokofrekvenční signál je užíván jednak z důvodu menšího vlivu na chod samotného stroje. Další důvod pro jeho užití je relativně snadné zpracování a vyhodnocení pomocí metod analýzy signálu, které lze snadno implementovat hardwarově (filtry, detekce obálky, fázový závěs). Dalším problémem injektovaného signálu jsou pak jeho parametry, jako amplituda a frekvence, ty jsou zpravidla nalézány experimentálně.

Je tedy na místě položit otázku, jestli takovýto přídatný signál může být optimálním buzením a nebo mu být alespoň v nějakém smyslu blízko? Odpověď samozřejmě není snadné z důvodu praktické neřešitelnosti problému nalezení optimálního duálního řízení. Ve prospěch injektáží, a zejména hybridních metod, mluví výsledky praktických experimentů na skutečných motorech, proti nim pak zejména to, že byly navrhovány bez ohledu na optimalitu a hledání kompromisu mezi opatrností a buzením. Nicméně se jedná o dobrý základ, který je vhodný k bližšímu prostudování při návrhu méně náročných metod duálního řízení.

## 4 Návrh a vyhodnocení

### 4.1 Implementace LQ řízení pro stejné indukčnosti

#### 4.1.1 LQ řízení v $\alpha - \beta$

##### Matice systému

Uvažujeme tedy diskretizované rovnice z části 1.5.4

$$\begin{aligned} i_{\alpha,t+1} &= \left(1 - \frac{R_s}{L_s} \Delta t\right) i_{\alpha,t} + \frac{\psi_{pm} \Delta t}{L_s} \omega_t \sin \vartheta_t + \frac{\Delta t}{L_s} u_{\alpha,t}, \\ i_{\beta,t+1} &= \left(1 - \frac{R_s}{L_s} \Delta t\right) i_{\beta,t} - \frac{\psi_{pm} \Delta t}{L_s} \omega_t \cos \vartheta_t + \frac{\Delta t}{L_s} u_{\beta,t}, \\ \omega_{t+1} &= \left(1 - \frac{B}{J} \Delta t\right) \omega_t + \frac{k_p p_p^2 \psi_{pm}}{J} \Delta t (i_{\beta,t} \cos \vartheta_t - i_{\alpha,t} \sin \vartheta_t) - \frac{p_p}{J} T_L \Delta t, \\ \vartheta_{t+1} &= \vartheta_t + \omega_t \Delta t. \end{aligned}$$

Pro zjednodušení označíme konstanty následovně:  $a = 1 - \frac{R_s}{L_s} \Delta t$ ,  $b = \frac{\psi_{pm}}{L_s} \Delta t$ ,  $c = \frac{\Delta t}{L_s}$ ,  $d = 1 - \frac{B}{J} \Delta t$ ,  $e = \frac{k_p p_p^2 \psi_{pm}}{J} \Delta t$ . Zátěžný moment předpokládáme nulový  $T_L = 0$  a tedy poslední člen třetí rovnice vypadne. Rovnice tedy přejdou na tvar

$$\begin{aligned} i_{\alpha,t+1} &= a i_{\alpha,t} + b \omega_t \sin \vartheta_t + c u_{\alpha,t}, \\ i_{\beta,t+1} &= a i_{\beta,t} - b \omega_t \cos \vartheta_t + c u_{\beta,t}, \\ \omega_{t+1} &= d \omega_t + e (i_{\beta,t} \cos \vartheta_t - i_{\alpha,t} \sin \vartheta_t), \\ \vartheta_{t+1} &= \vartheta_t + \omega_t \Delta t. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Jedná se o reprezentaci systému se stavem  $x_t = (i_{\alpha,t}, i_{\beta,t}, \omega_t, \vartheta_t)$  a řízením  $u_t = (u_{\alpha,t}, u_{\beta,t})$ , kde předchozí rovnice můžeme zapsat pomocí funkcí  $f$  a  $g$  jako  $x_{t+1} = f(x_t, u_t)$ . Chceme získat lineární systém ve tvaru  $x_{t+1} = A_t x_t + B_t u_t$ . Provedeme tedy linearizaci pomocí Taylorova rozvoje do prvního řádu v reprezentativní trajektorii  $(x_0, u_0)$ , tedy

$$f(x_t, u_t) = f(x_0, u_0) + \left. \frac{\partial f(x, u)}{\partial x} \right|_0 (x - x_0) + \left. \frac{\partial f(x, u)}{\partial u} \right|_0 (u - u_0).$$

Pak matice systému dostaneme ve tvaru  $A_t = \frac{\partial f(x_t, u_t)}{\partial x_t}$  a  $B_t = \frac{\partial f(x_t, u_t)}{\partial u_t}$ , což vede na

$$A_t = \begin{bmatrix} a & 0 & b \sin \vartheta_t & b\omega_t \cos \vartheta_t \\ 0 & a & -b \cos \vartheta_t & b\omega_t \sin \vartheta_t \\ -e \sin \vartheta_t & e \cos \vartheta_t & d & -e(i_{\beta,t} \sin \vartheta_t + i_{\alpha,t} \cos \vartheta_t) \\ 0 & 0 & \Delta t & 1 \end{bmatrix},$$

$$B_t = B = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & c \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dále, když budeme chtít jako pozorovatele užít Kalmanův filtr, budeme potřebovat vztah pro výstup systému, ten je formulován jako  $y_t = g(x_t) = (i_{\alpha,t}, i_{\beta,t})^T$ . Tato rovnice již lineární je a můžeme tedy rovnou psát  $y_t = Cx_t$ , kde

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

### Ztrátová funkce

Kvadratickou ztrátovou funkci pro LQ řízení se snažíme nalézt ve tvaru

$$\mathbf{E} \left\{ x_N^T Q_N x_N + \sum_{t=0}^{N-1} (x_t^T Q_t x_t + u_t^T R_t u_t) \right\}.$$

Požadavky na stavové proměnné jsou pouze dosažení požadovaných otáček  $\bar{\omega}$ . To můžeme snadno formulovat pomocí kvadratické funkce v každém časovém kroku jako  $q(\omega_t - \bar{\omega}_t)^2$ . Zde ale narážíme na problém, že veličinu  $\bar{\omega}_t$  nemáme ve stavu systému a algoritmus LQG s ní tedy nemůže počítat. To obecně při uvažování lineárně kvadratického řízení není problémem, toto řízení řídí vždy na nulu a když máme lineární systém, který tento algoritmus předpokládá, snadno si můžeme výsledek díky linearitě posunout. Uvažovaný systém PMSM však lineární není a je tedy třeba tento problém vyřešit zvlášť.

Zavedeme do systému novou stavovou proměnou odpovídající referenčnímu signálu  $\bar{\omega}$  a na nulu budeme řídit rozdíl  $\omega_t - \bar{\omega}_t$ . Z tohoto důvodu zavedeme substituci  $\psi_t = \omega_t - \bar{\omega}_t$  a pak  $\omega_t = \psi_t + \bar{\omega}_t$ . Dosadíme do rovnic (4.1) a získáme

$$\begin{aligned} i_{\alpha,t+1} &= ai_{\alpha,t} + b(\psi_t + \bar{\omega}_t) \sin \vartheta_t + cu_{\alpha,t}, \\ i_{\beta,t+1} &= ai_{\beta,t} - b(\psi_t + \bar{\omega}_t) \cos \vartheta_t + cu_{\beta,t}, \\ \psi_{t+1} &= d(\psi_t + \bar{\omega}_t) - \bar{\omega}_{t+1} + e(i_{\beta,t} \cos \vartheta_t - i_{\alpha,t} \sin \vartheta_t), \\ \vartheta_{t+1} &= \vartheta_t + (\psi_t + \bar{\omega}_t) \Delta t \\ \bar{\omega}_{t+1} &= \bar{\omega}_t. \end{aligned}$$

Nové matice systému  $A_t$ ,  $B$  a  $C$  jsou pak ve tvaru

$$A_t = \begin{bmatrix} a & 0 & b \sin \vartheta_t & b(\psi_t + \bar{\omega}_t) \cos \vartheta_t & b \sin \vartheta_t \\ 0 & a & -b \cos \vartheta_t & b(\psi_t + \bar{\omega}_t) \sin \vartheta_t & -b \cos \vartheta_t \\ -e \sin \vartheta_t & e \cos \vartheta_t & d & -e(i_\beta \sin \vartheta_t + i_\alpha \cos \vartheta_t) & d - 1 \\ 0 & 0 & \Delta t & 1 & \Delta t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & c \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A člen ztrátové funkce pro penalizaci za odchylku od požadované referenční hodnoty pak můžeme formulovat ve tvaru  $x_t^T Q x_t$  s maticí

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

kde nyní vektorem  $x_t$  označujeme nový stav  $x_t = (i_{\alpha,t}, i_{\beta,t}, \psi_t, \vartheta_t, \bar{\omega}_t)$ .

Omezení na vstupy nelze užít ve tvaru  $|u_{\alpha,\beta}| \leq U_{max}$ , protože jej nelze snadno formulovat pomocí kvadratické funkce. Namísto toho si musíme vystačit s penalizací  $u_t^T R_t u_t$ . Volíme tedy jednoduchou realizaci s konstantní maticí  $R$  s jedním neznámým parametrem  $r$

$$R = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix}.$$

Konkrétní hodnotu  $r$  je potřeba vhodně zvolit a nastavit při implementaci a nezáleží na její absolutní velikosti, ale na velikosti vzhledem k parametru  $q$  z matice  $Q$ .

Když chceme přidat ještě omezení na velikost změny vstupů  $|u_{\alpha,\beta}(t+1) - u_{\alpha,\beta}(t)|$ , lze tak jednoduše učinit pomocí přidání dalšího členu do ztrátové funkce. Tento člen budeme volit opět kvadratický a to ve tvaru  $(u_t - u_{t-1})^T S (u_t - u_{t-1})$ . Penalizační matici budeme opět uvažovat ve tvaru

$$S = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix},$$

kde  $s$  představuje vhodně zvolený parametr. Takovýto člen ale ve standartní ztrátové funkci LQ řízení nevystupuje a jeho přidání již není tak snadné. Při implementaci této verze algoritmu však bylo užito jiné verze LQ algoritmu, která je obecnější a tento zápis dovoluje. Zmiňovaný přístup je založen na maticovém QR rozkladu a kromě toho, že umožňuje mnohem obecnější zadání úlohy s lineárním systémem a kvadratickou ztrátovou funkcí, jeho výpočet je i rychlejší z důvodu efektivnějšího provádění maticové inverze, kterou by bylo třeba počítat při řešení Riccatiho rovnice (3.1).

### 4.1.2 LQ řízení v $d - q$

Postup je anlogický jako v případě pro  $\alpha - \beta$  souřadnice. Vyjdeme z rovnic

$$\begin{aligned} i_{d,t+1} &= \left(1 - \frac{R_s}{L_s} \Delta t\right) i_{d,t} + \Delta t \cdot i_{q,t} \omega_t + \frac{\Delta t}{L_s} u_{d,t}, \\ i_{q,t+1} &= \left(1 - \frac{R_s}{L_s} \Delta t\right) i_{q,t} - \Delta t \cdot i_{d,t} \omega_t - \frac{\psi_{pm} \Delta t}{L_s} \omega_t + \frac{\Delta t}{L_s} u_{q,t}, \\ \omega_{t+1} &= \left(1 - \frac{B}{J} \Delta t\right) \omega_t + \Delta t \frac{k_p p_p^2 \psi_{pm}}{J} i_{q,t} - \frac{p_p}{J} T_L \Delta t, \\ \vartheta_{t+1} &= \vartheta_t + \omega_t \Delta t, \end{aligned}$$

pro zjednodušení použijeme stejné označení konstant:  $a = 1 - \frac{R_s}{L_s} \Delta t$ ,  $b = \frac{\psi_{pm}}{L_s} \Delta t$ ,  $c = \frac{\Delta t}{L_s}$ ,  $d = 1 - \frac{B}{J} \Delta t$ ,  $e = \frac{k_p p_p^2 \psi_{pm}}{J} \Delta t$ . Zátěžný moment opět předpokládáme nulový  $T_L = 0$ . Získáme rovnice ve tvaru

$$\begin{aligned} i_{d,t+1} &= a i_{d,t} + \Delta t \cdot i_{q,t} \omega_t + c u_{d,t}, \\ i_{q,t+1} &= a i_{q,t} - \Delta t \cdot i_{d,t} \omega_t - b \omega_t + c u_{q,t}, \\ \omega_{t+1} &= d \omega_t + e i_{q,t}, \\ \vartheta_{t+1} &= \vartheta_t + \omega_t \Delta t. \end{aligned}$$

Tento tvar rovnic je z hlediska linearizece daleko příznivější, protože jedinými nelineárními členy jsou  $\pm \Delta t \cdot i_{q,d} \omega$ . Problematika těchto dvou členů byla již nastíněna v části 1.5.5, kde v rovnici (1.1) jsou tyto členy zarámovány. Při jistém pořadí úprav (které ale není zcela korektní) tyto členy nevzniknou a je tedy namísto otázka, co se stane, když je zanedbáme. Pak by systém byl lineární, matici řízení  $L$  by bylo možno předpočítat a celý návrh řízení by se usnadnil a hlavně urychlil. Jestli je však možné tyto členy zanedbat se ukáže až jako výsledek simulací, z tohoto důvodu zde bude uvedena i verze matic pro systém PMSM bez těchto členů.

Ještě je třeba upozornit na důležitý detail. Na první pohled by se mohlo zdát, že jsme z rovnic kompletně odstranili závislost na úhlu natočení  $\vartheta$  a nepotřebujeme jej tedy znát. To však není pravda, závislost tam stále je, i když skrytá. Měření výstupu i poskytování vstupu do systému probíhá v souřadné soustavě  $\alpha - \beta$ , když navrhujeme řízení v soustavě  $d - q$  je samozřejmě třeba provést transformaci a pak inverzní transformaci zpět. Tyto transformace byly popsány v části 1.4.2 a zřejmě závisí právě na úhlu natočení  $\vartheta$ .

Ztrátovou funkci budeme uvažovat stejnou jako v předchozím případě pro  $\alpha - \beta$  a stav rovnou rozšíříme o referenční signál na  $x_t = (i_{d,t}, i_{q,t}, \psi_t, \vartheta_t, \bar{\omega}_t)$ . Vektor řízení je

$u_t = (u_{d,t}, u_{q,t})$ . Matice pro systém při neuvažování členů  $\pm\Delta t \cdot i_{q,d}\omega$  jsou následující:

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & -b & 0 & -b \\ 0 & e & d & 0 & d-1 \\ 0 & 0 & \Delta t & 1 & \Delta t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & c \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Když členy  $\pm\Delta t \cdot i_{q,d}\omega$  uvažovat budeme, je třeba provést linearizaci a matice  $A_t$  pak již nebude konstantní

$$A_t = \begin{bmatrix} a & \Delta t \cdot \omega & \Delta t \cdot i_q & 0 & \Delta t \cdot i_q \\ -\Delta t \cdot \omega & a & -\Delta t \cdot i_d - b & 0 & -\Delta t \cdot i_d - b \\ 0 & e & d & 0 & d-1 \\ 0 & 0 & \Delta t & 1 & \Delta t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Matice  $B$  zůstává stejná.

## 4.2 Konkrétní hodnoty parametrů

### 4.2.1 Parametry PMSM

Pro simulace byl uvažován model PMSM s následujícími parametry:

$$\begin{aligned} R_s &= 0.28; \\ L_s &= 0.003465; \\ \psi_{pm} &= 0.1989; \\ B &= 0; \\ T_L &= 0; \\ \hat{k}_p &= 1.5; \\ p_p &= 4.0; \\ J &= 0.04; \\ \Delta t &= 0.000125. \end{aligned}$$

Což vede na zjednodušené koeficienty:

$$\begin{aligned}a &= 0.9898; \\b &= 0.0072; \\c &= 0.0361; \\d &= 1.0; \\e &= 0.0149.\end{aligned}$$

### 4.2.2 Kovarianční matice

Kovarianční matice  $M_k$  a  $N_k$  šumu v systému a šumu měření předpokládáme známé a pro účely testování je volíme následovně:

$$\begin{aligned}M_k &= \text{diag}(0.0013; 0.0013; 5.0e - 6; 1.0e - 10), \\N_k &= \text{diag}(0.0006; 0.0006).\end{aligned}$$

### 4.2.3 Další hodnoty

Další hodnoty, jako požadovaná hodnota otáček (referenční signál)  $\bar{\omega}$ , časový horizont  $T$ , penalizační matice ve ztrátové funkci  $Q$ ,  $R$ ,  $S$ , budou specifikovány pro konkrétní simulaci.

## 4.3 TODO

možná něco vlastního v matlabu

závěry ze simulátoru

**vypočítat časovou závislost prvků matice  $L$**

## Závěr



# Literatura

- [1] Bertsekas D. P.: *Dynamic Programming and Optimal Control*, ročník I. Belmont, Massachusetts: Athena Scientific, třetí vydání, 2005.
- [2] Bianchi, N.; Bolognani, S.; Jang, J.-H.; aj.: Comparison of PM Motor Structures and Sensorless Control Techniques for Zero-Speed Rotor Position Detection. *Power Electronics, IEEE Transactions on*, ročník 22, č. 6, 2007: s. 2466–2475, ISSN 0885-8993, doi:10.1109/TPEL.2007.904238.
- [3] Bianchi, N.; Bolognani, S.; Jang, J.-H.; aj.: Advantages of Inset PM Machines for Zero-Speed Sensorless Position Detection. *Industry Applications, IEEE Transactions on*, ročník 44, č. 4, 2008: s. 1190–1198, ISSN 0093-9994, doi:10.1109/TIA.2008.926203.
- [4] Bolognani, S.; Oboe, R.; Zigliotto, M.: Sensorless full-digital PMSM drive with EKF estimation of speed and rotor position. *Industrial Electronics, IEEE Transactions on*, ročník 46, č. 1, Únor 1999: s. 184–191, ISSN 0278-0046, doi:10.1109/41.744410.
- [5] Bolognani, S.; Tubiana, L.; Zigliotto, M.: EKF-based sensorless IPM synchronous motor drive for flux-weakening applications. *Industry Applications, IEEE Transactions on*, ročník 39, č. 3, 2003: s. 768–775, ISSN 0093-9994, doi:10.1109/TIA.2003.810666.
- [6] Bolognani, S.; Zigliotto, M.; Zordan, M.: Extended-range PMSM sensorless speed drive based on stochastic filtering. *Power Electronics, IEEE Transactions on*, ročník 16, č. 1, Leden 2001: s. 110–117, ISSN 0885-8993, doi:10.1109/63.903995.
- [7] Filatov, N.; Unbehauen, H.: Survey of adaptive dual control methods. *Control Theory and Applications, IEE Proceedings*, ročník 147, č. 1, Leden 2000: s. 118–128, ISSN 1350-2379, doi:10.1049/ip-cta:20000107.
- [8] Filatov, N.; Unbehauen, H.: Adaptive predictive control policy for nonlinear stochastic systems. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, ročník 40, č. 11, Listopad 1995: s. 1943–1949, ISSN 0018-9286, doi:10.1109/9.471221.
- [9] Filatov, N. M.; Unbehauen, H.: *Adaptive Dual Control, Theory and Applications*. Lecture Notes in Control and Information Sciences, Springer Berlin / Heidelberg, 2004.
- [10] Fišer, O.: *Střídavý regulovaný pohon se synchronním motorem s permanentními magnety*. Dizertační práce, VŠB - Technická univerzita Ostrava, dub 2006.

- [11] Harnefors, L.; Nee, H.-P.: A general algorithm for speed and position estimation of AC motors. *Industrial Electronics, IEEE Transactions on*, ročník 47, č. 1, Únor 2000: s. 77–83, ISSN 0278-0046, doi:10.1109/41.824128.
- [12] Jang, J.-H.; Sul, S.-K.; Ha, J.-I.; aj.: Sensorless drive of surface-mounted permanent-magnet motor by high-frequency signal injection based on magnetic saliency. *Industry Applications, IEEE Transactions on*, ročník 39, č. 4, 2003: s. 1031–1039, ISSN 0093-9994, doi:10.1109/TIA.2003.813734.
- [13] Kang, K.-L.; Kim, J.-M.; Hwang, K.-B.; aj.: Sensorless control of PMSM in high speed range with iterative sliding mode observer. In *Applied Power Electronics Conference and Exposition, 2004. APEC '04. Nineteenth Annual IEEE*, 2004.
- [14] Kim, H.; Lorenz, R.: Carrier signal injection based sensorless control methods for IPM synchronous machine drives. In *Industry Applications Conference, 2004. 39th IAS Annual Meeting. Conference Record of the 2004 IEEE*, ročník 2, 2004, ISSN 0197-2618, s. 977–984 vol.2, doi:10.1109/IAS.2004.1348532.
- [15] Kim, H.; Yi, S.; Kim, N.; aj.: Using low resolution position sensors in bumpless position/speed estimation methods for low cost PMSM drives. In *Industry Applications Conference, 2005. Fourtieth IAS Annual Meeting. Conference Record of the 2005*, ročník 4, 2005, ISSN 0197-2618, s. 2518–2525 Vol. 4, doi:10.1109/IAS.2005.1518814.
- [16] Linke, M.; Kennel, R.; Holtz, J.: Sensorless position control of permanent magnet synchronous machines without limitation at zero speed. In *IECON 02 [Industrial Electronics Society, IEEE 2002 28th Annual Conference of the]*, ročník 1, 2002, s. 674–679 vol.1, doi:10.1109/IECON.2002.1187588.
- [17] Linke, M.; Kennel, R.; Holtz, J.: Sensorless speed and position control of synchronous machines using alternating carrier injection. In *Electric Machines and Drives Conference, 2003. IEMDC'03. IEEE International*, ročník 2, 2003, s. 1211–1217 vol.2, doi:10.1109/IEMDC.2003.1210394.
- [18] Novák, J.: Uplatnění synchronních strojů v dopravní technice. *Elektro*, čvn-zář 2006.
- [19] Paturca, S. V.; Covrig, M.; Melcescu, L.: Direct Torque Control of Permanent Magnet Synchronous Motor (PMSM) - an approach by using Space Vector Modulation (SVM). In *Proceedings of the 6th WSEAS/IASME Int. Conf. on Electric Power Systems, High Voltages, Electric Machines*, 2006.
- [20] Persson, J.; Markovic, M.; Perriard, Y.: A new standstill position detection technique for non-salient PMSM's using the magnetic anisotropy method (MAM). In *Industry Applications Conference, 2005. Fourtieth IAS Annual Meeting. Conference Record of the 2005*, ročník 1, 2005, ISSN 0197-2618, s. 238–244 Vol. 1, doi:10.1109/IAS.2005.1518316.

- [21] Piippo, A.; Hinkkanen, M.; Luomi, J.: Sensorless control of PMSM drives using a combination of voltage model and HF signal injection. In *Industry Applications Conference, 2004. 39th IAS Annual Meeting. Conference Record of the 2004 IEEE*, ročník 2, 2004, ISSN 0197-2618, s. 964–970 vol.2, doi:10.1109/IAS.2004.1348530.
- [22] Piippo, A.; Hinkkanen, M.; Luomi, J.: Analysis of an Adaptive Observer for Sensorless Control of Interior Permanent Magnet Synchronous Motors. *Industrial Electronics, IEEE Transactions on*, ročník 55, č. 2, 2008: s. 570–576, ISSN 0278-0046, doi:10.1109/TIE.2007.911949.
- [23] Piippo, A.; Salomaki, J.; Luomi, J.: Signal Injection in Sensorless PMSM Drives Equipped With Inverter Output Filter. *Industry Applications, IEEE Transactions on*, ročník 44, č. 5, 2008: s. 1614–1620, ISSN 0093-9994, doi:10.1109/TIA.2008.2002274.
- [24] Schmidt, P.; Gasperi, M.; Ray, G.; aj.: Initial rotor angle detection of a nonsalient pole permanent magnet synchronous machine. In *Industry Applications Conference, 1997. Thirty-Second IAS Annual Meeting, IAS '97., Conference Record of the 1997 IEEE*, ročník 1, Říjen 1997, s. 459–463 vol.1, doi:10.1109/IAS.1997.643063.
- [25] Sebald, A. V.: A computationally efficient optimal solution to the LQG discrete time dual control problem. In *Decision and Control including the 17th Symposium on Adaptive Processes, 1978 IEEE Conference on*, ročník 17, jan. 1978, s. 1160–1165, doi:10.1109/CDC.1978.268117.
- [26] Silva, C.; Asher, G.; Sumner, M.: Hybrid rotor position observer for wide speed-range sensorless PM motor drives including zero speed. *Industrial Electronics, IEEE Transactions on*, ročník 53, č. 2, 2006: s. 373–378, ISSN 0278-0046, doi:10.1109/TIE.2006.870867.
- [27] Unbehauen, H.: Adaptive dual control systems: a survey. In *Adaptive Systems for Signal Processing, Communications, and Control Symposium 2000. AS-SPCC. The IEEE 2000*, 2000.
- [28] Urlep, E.; Jezernik, K.: Low and Zero Speed Sensorless Control of nonsalient PMSM. In *Industrial Electronics, 2007. ISIE 2007. IEEE International Symposium on*, 2007, s. 2238–2243, doi:10.1109/ISIE.2007.4374956.
- [29] Černý, O.; Doleček, R.; Novák, J.: Synchronní motory s permanentními magnety pro trakční pohony kolejových vozidel. *Vědeckotechnický sborník ČD*, , č. 29, 2010.
- [30] Štulrajter, M.; Hrabovcová, V.; Franko, M.: Permanent magnets synchronous motor control theory. *Journal of Electrical Engineering*, ročník 58, č. 2, 2007: s. 79–84.
- [31] Wallmark, O.; Harnefors, L.; Carlson, O.: Control Algorithms for a Fault-Tolerant PMSM Drive. *Industrial Electronics, IEEE Transactions on*, ročník 54, č. 4, 2007: s. 1973 –1980, ISSN 0278-0046, doi:10.1109/TIE.2007.895076.

- [32] Welch, G.; Bishop, G.: An introduction to the Kalman filter. Technická zpráva, UNC-Chapel Hill, 2006.