

Úvod

Synchronní motory, a to především ty osazené permanentními magnety, jsou v poslední době stále více oblíbené pro řadu praktických aplikací. Hlavním nedostatkem pro jejich využití ale je, že za účelem jejich dobrého řízení je nutná znalost polohy hřídele. Tento problém byl zatím řešen převážně instalací mechanických senzorů, které však zvyšují rozměry, poruchovost, ale především cenu celého zařízení. Je tedy přirozené, že se objevily snahy o nalezení efektivního způsobu řízení bez potřeby těchto čidel.

V současné době již existuje pro bezsenzorové řízení synchronních strojů celá řada postupů a dokonce i pokusy o implementaci bezsenzorového řízení v praxi [23, 36, 56]. Hlavním problémem všech dostupných metod však je, že se povětšinou jedná o experimentálně nalezené postupy vyvinuté pro konkrétní účel bez hlubšího teoretického kontextu. Dobré teoretické pozadí pro bezsenzorové řízení by však mohl poskytnout právě koncept duálního řízení, které se snaží nalézt kompromis mezi co nejpřesnějším řízením a současně dobrým odhadováním neměřených veličin. Teorie ohledně duálního řízení je již značně rozvinuta a hojně popsána v literatuře. Avšak naprostá většina postupů využívajících duálního řízení je extrémně výpočetně náročná, což není příliš vhodné pro aplikaci na řízení motoru, které je třeba provádět v reálném čase.

Tato práce si tedy klade za cíl prostudovat jednoduché suboptimální algoritmy pro výpočet duálního řízení a pokusit se jejich vybrané zástupce aplikovat na bezsenzorové řízení synchronního motoru. Dále pak klasifikovat běžně používané přístupy k řízení těchto strojů z pohledu konceptu duálního řízení a ukázat případné výhody užití duality.

V textu bude nejdříve obecně popsán synchronní motor s permanentními magnety, jeho matematický model a běžně užívané techniky pro řízení a odhadování neměřených veličin. Následovat bude kapitola týkající se teorie duálního řízení a výběr jednoduchých suboptimálních metod pro řešení tohoto problému. Další kapitola pak bude věnována spojení předchozích dvou, tedy aplikaci duálního řízení na synchronní stroj. Na závěr pak budou zařazeny experimenty, především teoretická analýza jednotlivých užitých algoritmů a výsledky simulací. Nedílnou součástí bude i shrnutí dosažených výsledků.

1 Synchronní stroj s permanentními magnety

Jak napovídá název práce, je text zaměřen na řízení synchronních elektrických pohonů. Ze skupiny všech těchto strojů se však zaměřuje pouze na jejich specifickou podskupinu obsahující permanentní magnety. Je tomu tak proto, že oproti synchronním strojům s buzením vykazují synchronní stroje s permanentními magnety celou řadu výhod, teší se stále větší oblíbenosti a nacházejí mnoho aplikací v praxi [36].

1.1 PMSM

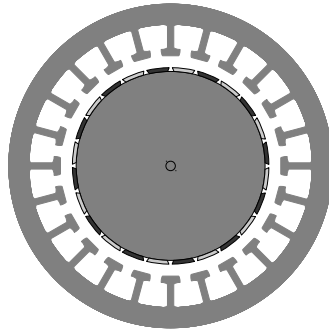
Zkratkou PMSM bude v textu označován synchronní stroj s permanentními magnety (Permanent Magnet Synchronous Machine). U tohoto točivého elektrického stroje (motoru) se rotor otáčí stejnou rychlostí, tedy synchronně, jako točivé magnetické pole statoru. Pro generování magnetického pole rotoru je užito místo budícího vinutí permanentních magnetů. Rostoucí praktická aplikace této konstrukce je umožněna především díky snadnější dostupnosti kvalitních permanentních magnetů ze speciálních slitin s velkou magnetickou indukci oproti klasickým feritovým magnetům [35, 51].

1.1.1 Konstrukce

Přiblížení základní konstrukce PMSM je znázorněno na obrázku 1.1. Nákres je pouze ilustrativní, ale zobrazuje hlavní části PMSM: Vnější kruh představuje stator se zuby, na kterých je navinuto statorové vinutí (v obrázku není zobrazeno). Vnitřní kruh reprezentuje rotor, na jehož povrchu jsou umístěny permanentní magnety s barevně rozlišenými póly.

Často se lze setkat i s opačnou konstrukcí, kdy je stator umístěn uvnitř a rotor s magnety se otáčí kolem něj. Tato konstrukce PMSM nalézá využití k pohonu nejrůznějších vozidel, kdy lze motor umístit přímo dovnitř kola vozidla, dalším příkladem je pak přímý pohon bubny automatické pračky. Existují i však další konstrukce PMSM, například s otočným státorem i rotorem.

Vyobrazená konstrukce (obrázek 1.1) je označována jako SMPMSM (*Surface Mounted PMSM*), tedy PMSM s magnety na povrchu. Další častou konstrukcí je IPMSM (*Inner PMSM*), kde jsou permanentní magnety umístěny uvnitř rotoru. Tyto stroje mají nepatrně odlišné vlastnosti, které ale mají významný vliv při návrhu řízení těchto strojů, detailněji bude rozebráno dále v textu. Pod PMSM se ještě někdy zahrnují reluktanční motory, které jsou založeny na poněkud odlišném principu a nebudeme se jimi v textu zabývat.



Obrázek 1.1: *Ilustrativní obrázek konstrukce PMSM: Vnější kruh představuje stator se zuby, na kterých je navinuto statorové vinutí (v obrázku není zobrazeno). Vnitřní kruh reprezentuje rotor, na jehož povrchu jsou umístěny permanentní magnety s barevně rozlišenými póly.*

1.1.2 Výhody a nevýhody

Specifická konstrukce PMSM stručně popsaná výše má oproti asynchronním strojům a synchronním strojům s budícím vinutím celou řadu výhod. Má samozřejmě i své nevýhody. Následující přehled základních odlišností od ostatních střídavých strojů čerpá ze zdrojů [35, 51, 56]:

Výhody

- rotor neobsahuje vinutí a tedy
 - je možno jej konstruovat menší, což je velmi výhodné v aplikacích, kde záleží na co nejmenší velikosti pohonu
 - je možno jej konstruovat lehčí, což snižuje hmotnost celého zařízení
 - má menší moment setrvačnosti rotoru
 - není třeba složitě přivádět napájení na rotor
 - nedojde k poruše na rotorovém vinutí
- není třeba motor před rozběhem budit a nepotřebuje zdroj budícího proudu
- odpadá problém s přívodem proudu do buzení rotoru
- vyšší účinnost, protože nejsou jouleovy ztráty v:
 - rotoru oproti asynchronnímu stroji
 - buzení oproti synchronnímu stroji s buzením
- momentová přetížitelnost
- možnost konstrukce pomaluběžného stroje s dostatečným výkonem, který nepotřebuje převodovku, a tedy výhody spojené s absencí převodovky

Nevýhody

- technologicky složitější výroba kvůli připevňování permanentních magnetů na rotor
- složitější opravy
- vyšší cena z důvodu nezanedbatelných nákladů na permanentní magnety
- menší robustnost
- problematické odbuzování a klesající účinnost při odbuzování
- závislost magnetických vlastností permanentních magnetů na teplotě a tedy nutnost dobrého chlazení
- stálá přítomnost budícího pole v motoru, následně při využití například k pohonu vozidla, dojde-li poruše a následně odtahu, funguje motor jako generátor
- problematika zkratu, při které může teoreticky dojít až k demagnetizaci permanentních magnetů
- *problematika spojená s návrhem řízení těchto strojů*

Právě poslední zmiňovaný nedostatek, to jest komplikace při návrhu řízení PMSM a způsoby jak se s tímto nedostatkem vypořádat jsou ústředním tématem této práce.

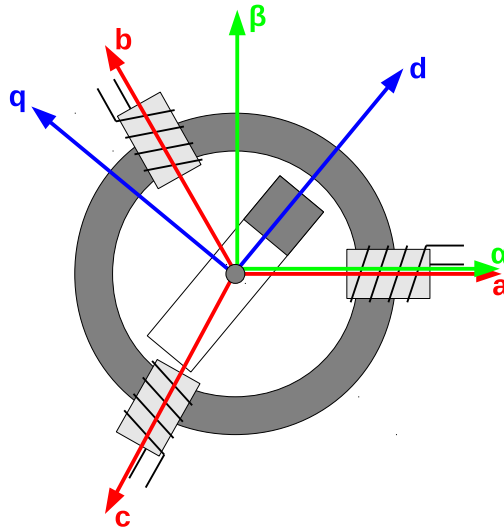
1.2 Matematický model PMSM

Aby bylo možno systém PMSM lépe pochopit, pracovat s ním, odvozovat algoritmy pro jeho řízení a simulovat jeho chování je nutné jej vhodným způsobem popsat. Za tímto účelem bude v této části popsán model tohoto zařízení v podobě diferenciálních a případně diferenčních rovnic zachycující jeho chování.

1.2.1 Souřadné soustavy pro popis PMSM

K popisu PMSM se užívá dvou kvalitativně zcela rozdílných typů fyzikálních veličin. Jedná se o veličiny mechanické jako poloha (úhel natočení rotoru) a otáčky (rychlost otáčení), dále pak lze uvažovat zátěžný moment nebo tření. Další uvažované veličiny jsou elektrické, především elektrické proudy a napětí, a dále indukčnosti a rezistance.

Elektrické veličiny se nejčastěji uvažují v jednom ze tří souřadných systémů vyobrazených na obrázku 1.2. Souřadný systém $a-b-c$ uvažuje tři osy (a, b, c) ve směru os vinutí jednotlivých fází. Protože však elektrické veličiny v jednotlivých osách systému $a-b-c$ nebývají vzájemně nezávislé a jsou svázány nějakým vztahem, je obvykle využíván popis v soustavě $\alpha-\beta$. Tato souřadná soustava je opět svázána se statorem. Osa α je totožná s osou a , osa β je na osu α kolmá a tvoří tak ortogonální systém. Pro mnoho aplikací se však ukazuje výhodným přejít do rotující souřadné soustavy $d-q$ svázené s rotorem. Osa d je pak umístěna ve směru osy permanentního magnetu a směřuje k jeho severnímu pólu, osa q je na ni kolmá.



Obrázek 1.2: Souřadné systémy používané pro popis PMSM znázorněné na zjednodušeném modelu: na statorové části jsou umístěny pouze tři cívky reprezentující statorová vinutí jednotlivých fází a jako rotor pak slouží jediný permanentní magnet.

1.2.2 Transformace souřadnic

Žádná z výše zmiňovaných souřadných soustav není univerzálně nejlepší. Pro každý účel se nejlépe hodí jen některá z nich a proto je důležité umět mezi nimi přecházet, tedy převádět jednotlivé veličiny.

Transformace $a - b - c \longleftrightarrow \alpha - \beta$

Tato transformace se označuje také jako Clarkova transformace, rovnice lze nalézt například v [18], případně je možné je odvodit.

Osa α je totožná s osou a , osy b a c pak uvažujeme oproti ní otočeny o $\pm 120^\circ$. Souřadnice v ose α tedy získáme následujícím průmětem z os a , b , c

$$\alpha = k (a + b \cdot \cos(120^\circ) + c \cdot \cos(-120^\circ)) = k \left(a - \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}c \right)$$

kde k značí normovací konstantu $k = \frac{2}{3}$. Obdobně postupujeme v případě osy β . Osa α je na ní kolmá a tedy její příspěvek je nulový. Osy b a c promítnutne do osy β získáme vztah

$$\beta = k (b \cdot \sin(120^\circ) + c \cdot \sin(-120^\circ)) = k \left(\frac{\sqrt{3}}{2}b - \frac{\sqrt{3}}{2}c \right)$$

Celkem tedy máme rovnice

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{2}{3} \left(a - \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}c \right) \\ \beta &= \frac{\sqrt{3}}{3} (b - c)\end{aligned}$$

Pro inverzní transformaci platí následující vztahy

$$\begin{aligned}a &= \alpha + \theta \\ b &= \left(-\frac{1}{2}\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\beta \right) + \theta \\ c &= \left(-\frac{1}{2}\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}\beta \right) + \theta\end{aligned}$$

kde θ představuje takzvanou nulovou složku $\theta = \frac{1}{3} (a + b + c)$.

Transformace $\alpha - \beta \longleftrightarrow d - q$

Transformace je označována jako Parkova transformace a představuje přechod do rotujícího souřadného systému. Rovnice transformace lze najít opět například v [18], ale jedná se běžnou lineární operaci rotace.

Uvažujeme tedy otočení doustavy $d-q$ oproti $\alpha-\beta$ o úhel ϕ kolem společného počátku souřadných soustav, což vede na převodní vztah

$$\begin{pmatrix} d \\ q \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

Inverzní transformace je

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{pmatrix} d \\ q \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

1.2.3 Model PMSM

Pro tvorbu modelu PMSM vyjdeme z fyzikálních zákonů popisujících hlavní děje odehrávající se v synchronním stroji. Jedná se především o jevy elektrické, mechanické a vzájemnou přeměnu elektrické a mechanické energie. Složitější jevy jako proměnlivost parametrů s teplotou, sycení materiálu magnetickým tokem, případně vliv napájecí elektroniky v tomto modelu uvažovány nebudou. Fyzikální vztahy a zákony pro odvození rovnic PMSM jsou čerpány z [13, 14].

Rovnice pro proudy

Cílem je odvodit rovnice pro PMSM a tedy vyjádřit, jak na sobě hlavní veličiny popisující tento systém navzájem závisují a jak se vyvíjejí v čase. Vyjdeme ze vztahu pro napětí v obvodu statoru. Statorové napětí u_s uvažujeme zapsané ve souřadné soustavě $\alpha - \beta$ ve smyslu $s = \alpha + j\beta$ (kde j značí komplexní jednotku) a dále uvažujeme, že je obecně funkcí času $u_s = u_s(t)$. Toto napětí lze vyjádřit jako součet napětí souvisejícího s průchodem proudu obvodem a dále jako indukovaného napětí v důsledku elektromagnetické indukce. První z těchto členů lze vyjádřit pomocí Ohmova zákona v závislosti na proudu. Indukované napětí je na základě Faradayova zákona elektromagnetické indukce rovno změně magnetického toku v čase. Uvažujme tedy, že proud procházející státorem i_s i magnetický tok ve stroji ψ_s zapsaný ve statorové souřadné soustavě jsou opět funkcemi času: $i_s = i_s(t)$ a $\psi_s = \psi_s(t)$. Rovnici pro napětí pak získáme ve tvaru

$$u_s = R_s i_s + \frac{d\psi_s}{dt} \quad (1.3)$$

kde R_s je rezistance a předpokládáme ji známou a konstantní.

Nyní je třeba vyjádřit hodnotu magnetického toku ψ_s . Magnetický tok vzniká ve stroji jednak ve statorovém vinutí a dále v důsledku působení permanentních magnetů. Statorové vinutí je z fyzikálního pohledu cívkou a tedy magnetický tok je přímo úměrný proudu procházejícímu touto cívkou: $\psi_s^{civka} = L_s i_s$, kde L_s označuje indukčnost cívky, kterou předpokládáme konstantní, známou a prozatím izotropní. Tok permanentních magnetů označíme jako ψ_{pm} a považujeme jej za známou konstantu. Rotor obsahující permanentní magnety je však obecně natočen a tok permanentních magnetů je směřován pouze do směru osy d . Úhel natočení, označme jej jako ϑ , budeme opět uvažovat jako funkci času $\vartheta = \vartheta(t)$. Rovnice pro celkový magnetický tok ve stroji tedy je

$$\psi_s = L_s i_s + \psi_{pm} e^{j\vartheta} \quad (1.4)$$

kde násobení $e^{j\vartheta}$ představuje zmiňovanou rotaci o úhel ϑ při použití komplexního zápisu.

Když nyní dosadíme rovnici (1.4) pro magnetický tok do rovnice pro napětí (1.3) a provedeme derivaci, získáme

$$u_s = R_s i_s + \frac{d(L_s i_s + \psi_{pm} e^{j\vartheta})}{dt} = R_s i_s + L_s \frac{di_s}{dt} + j\psi_{pm} \frac{d\vartheta}{dt} e^{j\vartheta}$$

V této rovnici nově vystupuje veličina $\frac{d\vartheta}{dt}$ představující změnu polohy v čase, označíme ji jako otáčky

$$\omega = \frac{d\vartheta}{dt} \quad (1.5)$$

Pro obdržení diferenciálních rovnic pro proudy v soustavě $\alpha - \beta$ rozepíšeme zvlášť reálnou a imaginární složku statorové soustavy s ($s = \alpha + j\beta$). Rovnice tedy jsou

$$\begin{aligned} u_\alpha &= R_s i_\alpha + L_s \frac{di_\alpha}{dt} - \psi_{pm} \omega \sin \vartheta \\ u_\beta &= R_s i_\beta + L_s \frac{di_\beta}{dt} + \psi_{pm} \omega \cos \vartheta \end{aligned}$$

a případně je možno je upravit na

$$\begin{aligned}\frac{di_\alpha}{dt} &= -\frac{R_s}{L_s}i_\alpha + \frac{\psi_{pm}}{L_s}\omega \sin \vartheta + \frac{1}{L_s}u_\alpha \\ \frac{di_\beta}{dt} &= -\frac{R_s}{L_s}i_\beta - \frac{\psi_{pm}}{L_s}\omega \cos \vartheta + \frac{1}{L_s}u_\beta\end{aligned}\quad (1.6)$$

Stejně rovnice používají například v [29, 38]. Rovnice v soustavě $d - q$ je z nich možno získat aplikováním transformace popsané rovnicí (1.1).

Rovnice pro otáčky

V odvození rovnic (1.6) byla zavedena veličina ω , viz rovnice (1.5), popisující hodnotu otáček (změny polohy) v čase. Má-li být model PMSM úplný, je třeba odvodit rovnici i pro otáčky ω . Protože se jedná o mechanickou veličinu, budeme vycházet ze základních zákonů mechaniky. Nejdříve uijeme vztahu pro točivý moment (*torque*) T , který budeme považovat za funkci času $T = T(t)$. Točivý moment lze vyjádřit jako $T = \frac{dl}{dt}$, kde l značí moment hybnosti (*angular momentum*). Pro ten dále platí $l = J\omega_{mech}$, kde J označuje moment setrvačnosti (*moment of inertia*) a předpokládáme ho jako známou konstantu, ω_{mech} jsou mechanické otáčky. Mechanické otáčky odpovídají skutečnému otáčení stroje a liší se od otáček elektrických ω vystupujících v rovnicích (1.6) pro proudy a jejich odvození. Vztah těchto dvou typů otáček je dán rovnicí

$$\omega = p_p\omega_{mech}\quad (1.7)$$

kde hodnota p_p představuje počet párů pólů (tedy polovina počtu pólů) permanentních magnetů stroje.

Dalším důležitým poznatkem je, že při působení více točivých momentů se tyto momenty sčítají a tedy platí

$$T_1 + \dots + T_n = \frac{dl}{dt} = \frac{d(J\omega_{mech})}{dt} = J\frac{d\omega_{mech}}{dt}\quad (1.8)$$

Jednotlivé uvažované točivé momenty T_i jsou:

1. moment získaný konverzním procesem elektrické energie, který vyjadřuje hlavní vlastnost elektrického motoru – převod elektrické energie na mechanickou: $T_1 = T_{el}$
2. zátěžný moment reprezentující zatížení stroje, tedy to, co je motorem poháněno; působí však v opačném směru (proti pohybu): $T_2 = -T_L$
3. moment v důsledku tření (mechanické ztráty ve stroji), působí opět proti pohybu a uvažujeme jej lineárně závislý na otáčkách s koeficientem viskozity (tržení) B : $T_3 = -B\omega_{mech}$

Celkem tedy rovnice (1.8) po dosazení konkrétních momentů přejde na

$$T_{el} - T_L - B\omega_{mech} = J\frac{d\omega_{mech}}{dt}\quad (1.9)$$

Zátěžný moment T_L sice uvažujeme obecně proměnný v čase, ale vzhledem k tomu, že představuje externí zátěž stroje, není možnost jej jakkoliv předvídat, popřípadě vhodně vyjádřit na základě jiných veličin. V rovnicích tedy bude nadále vystupovat pod označením T_L a budeme jej považovat za neznámou funkci času.

Moment T_{el} však lze vyjádřit na základě elektrických veličin. Využijeme k tomu výpočet přes okamžitý výkon. Ten je pro trojfázový systém (v souřadnicích $a - b - c$) roven $P = u_a i_a + u_b i_b + u_c i_c$. Po provedení transformace do souřadnic $\alpha - \beta$ je vyjádřen ve tvaru

$$P = k_p (u_\alpha i_\alpha + u_\beta i_\beta) \quad (1.10)$$

kde k_p značí Parkovu konstantu s hodnotou $k_p = \frac{3}{2}$. Jako napětí zde uvažujeme indukované napětí u_{ind} , to jest druhý člen v rovnici (1.3), protože první člen této rovnice je napětí, které se podílí na tepelném výkonu stroje – ztrátách. Tedy pro indukované napětí platí, viz rovnice (1.3) a (1.4):

$$u_{ind} = \frac{d\psi_s}{dt} = \frac{d(L_s i_s + \psi_{pm} e^{j\vartheta})}{dt} = L_s \frac{di_s}{dt} + j\psi_{pm} \omega e^{j\vartheta}$$

Z indukovaného napětí navíc využijeme pouze složku reprezentovanou druhým výrazem, protože první složka obsahující derivace proudů slouží k tvorbě samotného magnetického pole stroje a nepodílí se na tvorbě výkonu. Následně v souřadném systému $\alpha - \beta$ získáme vyjádření indukovaných napětí podílejících se na výkonu jako

$$\begin{aligned} u_{ind,\alpha} &= -\psi_{pm} \omega \sin \vartheta \\ u_{ind,\beta} &= \psi_{pm} \omega \cos \vartheta \end{aligned}$$

a po dosazení do (1.10) je

$$P = k_p (-\psi_{pm} i_\alpha \omega \sin \vartheta + \psi_{pm} i_\beta \omega \cos \vartheta) \quad (1.11)$$

Okamžitý výkon lze také vyjádřit z mechanických veličin jako

$$P = \omega_{mech} T_{el} \quad (1.12)$$

a dosazením z (1.11) již získáme vyjádření pro moment T_{el} ve tvaru:

$$T_{el} = \frac{P}{\omega_{mech}} = \frac{k_p}{\omega_{mech}} (-\psi_{pm} i_\alpha \omega \sin \vartheta + \psi_{pm} i_\beta \omega \cos \vartheta)$$

což lze pomocí vztahu (1.7) upravit na

$$T_{el} = k_p p_p (-\psi_{pm} i_\alpha \sin \vartheta + \psi_{pm} i_\beta \cos \vartheta)$$

Stejnou rovnicí pro moment T_{el} používají například v [29]. Dosazení do rovnice (1.9) pak vede na tvar

$$k_p p_p \psi_{pm} (-i_\alpha \sin \vartheta + i_\beta \cos \vartheta) - T_L - B \omega_{mech} = J \frac{d\omega_{mech}}{dt}$$

Tuto rovnici lze opět užitím vztahu (1.7) upravit tak, aby v ní vystupovali elektrické otáčky ω a dále z rovnice vyjádřit jejich derivaci

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{k_p p_p^2 \psi_{pm}}{J} (i_\beta \cos \vartheta - i_\alpha \sin \vartheta) - \frac{p_p}{J} T_L - \frac{B}{J} \omega \quad (1.13)$$

Rovnici pro otáčky v této podobě (1.13) lze nalézt například v [38].

Rovnice pro proudy při různých indukčnostech

Pro použití s některými, především injektážními, metodami je do modelu PMSM třeba zahrnout anizotropie, které následně usnadní odhadování polohy. Možností, jak zavést anizotropie je uvažování různých indukčností v osách d a q . Tyto osy jsou svázané s rotorem a tedy i s permanentními magnety na něm, viz obrázek 1.2. Tok permanentních magnetů interaguje s cívkami statoru a mění jejich vlastnosti, což vede právě na rozdílné indukčnosti v osách d a q . Tedy místo jediné izotropní L_s nyní uvažujeme různé $L_d \neq L_q$, nadále je však považujeme za známé konstanty. Postup odvození rovnic bude analogický předchozímu odvození pro stejné indukčnosti s tím rozdílem, že bude užito soustavy $d-q$. Opět vyjdeme z rovnice (1.3), kde za veličiny ve statorové souřadné soustavě s dosadíme veličiny v rotorové soustavě $d-q$ ve smyslu $r = d + jq$ otočené o úhel ϑ . Tedy

$$u_r e^{j\vartheta} = R_s i_r e^{j\vartheta} + \frac{d(\psi_r e^{j\vartheta})}{dt}$$

a po zderivování

$$u_r e^{j\vartheta} = R_s i_r e^{j\vartheta} + \frac{d\psi_r}{dt} e^{j\vartheta} + j\psi_r \omega e^{j\vartheta}$$

Nyní je možné zkrátit člen $e^{j\vartheta}$ představující rotaci a získáme rovnici pro napětí ve tvaru

$$u_r = R_s i_r + \frac{d\psi_r}{dt} + j\psi_r \omega \quad (1.14)$$

Magnetický tok v osách $d-q$ je vyjádřen podobně, jako pro stejné indukčnosti, jako součet toku indukovaného cívkami a toku permanentních magnetů, tedy

$$\begin{aligned} \psi_d &= L_d i_d + \psi_{pm} \\ \psi_q &= L_q i_q \end{aligned}$$

a ψ_{pm} se projeví pouze v první rovnici, protože tok permanentních magnetů uvažujeme pouze ve směru osy d . Po dosazení vztahů pro toky do rovnice (1.14) a jejím rozepsání zvlášť na reálnou a imaginární složku rotorové souřadné soustavy r získáme rovnice

$$\begin{aligned} u_d &= R_s i_d + L_d \frac{di_d}{dt} - L_q i_q \omega \\ u_q &= R_s i_q + L_q \frac{di_q}{dt} + (L_d i_d + \psi_{pm}) \omega \end{aligned}$$

Opět je možno vyjádřit derivace proudů a získat rovnice pro proudy v soustavě $d - q$ ve tvaru

$$\begin{aligned}\frac{di_d}{dt} &= -\frac{R_s}{L_d}i_d + \frac{L_q}{L_d}i_q\omega + \frac{1}{L_d}u_d \\ \frac{di_q}{dt} &= -\frac{R_s}{L_q}i_q - \frac{L_d}{L_q}i_d\omega - \frac{\psi_{pm}}{L_q}\omega + \frac{1}{L_q}u_q\end{aligned}\quad (1.15)$$

Tyto rovnice používají například v [8, 19, 20]. Rovnice pro proudy v soustavě $\alpha - \beta$ lze získat transformováním rovnic (1.15) pomocí vztahu (1.2), tyto rovnice však již mají poměrně dosti komplikovaný zápis.

Rovnice pro otáčky při různých indukčnostech

Postup odvození rovnice pro otáčky při uvažování různých indukčností je opět podobný jako v případě stejných indukčností. Pro momenty platí opět rovnice (1.9):

$$T_{el} - T_L - B\omega_{mech} = J\frac{d\omega_{mech}}{dt}$$

kde T_{el} vypočteme přes okamžitý elektrický výkon. Užijeme tedy rovnice (1.10) a provedeme transformaci souřadnic danou vztahem (1.2):

$$P = k_p(u_\alpha i_\alpha + u_\beta i_\beta) = k_p(u_d i_d + u_q i_q)$$

Nyní za napětí dosadíme indukovaná napětí bez složek obsahující derivace proudů, tedy

$$\begin{aligned}u_{ind,d} &= -L_q i_q \omega \\ u_{ind,q} &= (L_d i_d + \psi_{pm}) \omega\end{aligned}$$

a následně po dosazení do rovnice pro výkon získáme

$$P = k_p((L_d - L_q)i_d i_q + \psi_{pm}i_q)\omega$$

Výsledkem užitím vztahu pro okamžitý výkon P a moment T_{el} , viz rovnice (1.12), a převodního vztahu pro otáčky (1.7) je rovnice

$$T_{el} = k_p p_p ((L_d - L_q)i_d i_q + \psi_{pm}i_q)$$

a po dosazení do rovnice pro momenty (1.9), užití převodního vztahu pro otáčky (1.7) a vyjádření derivací získáme rovnici pro otáčky ve tvaru

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{k_p p_p^2}{J} ((L_d - L_q)i_d i_q + \psi_{pm}i_q) - \frac{p_p}{J} T_L - \frac{B}{J} \omega \quad (1.16)$$

který lze rovněž najít v [8, 20].

Shrnutí rovnic pro PMSM

Pro přehlednost je ještě uvedeno shrnutí výše odvozených rovnic popisujících PMSM. Nejdříve soustava rovnic v souřadnicích $\alpha - \beta$ při uvažování stejných indukčností, tedy rovnice (1.6), (1.13) a (1.5):

$$\begin{aligned}\frac{di_\alpha}{dt} &= -\frac{R_s}{L_s}i_\alpha + \frac{\psi_{pm}}{L_s}\omega \sin \vartheta + \frac{1}{L_s}u_\alpha \\ \frac{di_\beta}{dt} &= -\frac{R_s}{L_s}i_\beta - \frac{\psi_{pm}}{L_s}\omega \cos \vartheta + \frac{1}{L_s}u_\beta \\ \frac{d\omega}{dt} &= \frac{k_p p_p^2 \psi_{pm}}{J} (i_\beta \cos \vartheta - i_\alpha \sin \vartheta) - \frac{p_p}{J} T_L - \frac{B}{J} \omega \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= \omega\end{aligned}\tag{1.17}$$

Následuje soustava pro různé indukčnosti L_d a L_q v souřadné soustavě $d - q$ vzniklá spojením rovnic (1.15), (1.16) a (1.5):

$$\begin{aligned}\frac{di_d}{dt} &= -\frac{R_s}{L_d}i_d + \frac{L_q}{L_d}i_q\omega + \frac{1}{L_d}u_d \\ \frac{di_q}{dt} &= -\frac{R_s}{L_q}i_q - \frac{L_d}{L_q}i_d\omega - \frac{\psi_{pm}}{L_q}\omega + \frac{1}{L_q}u_q \\ \frac{d\omega}{dt} &= \frac{k_p p_p^2}{J} ((L_d - L_q) i_d i_q + \psi_{pm} i_q) - \frac{p_p}{J} T_L - \frac{B}{J} \omega \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= \omega\end{aligned}\tag{1.18}$$

1.2.4 Diskretizace

Vzhledem k uvažované implementaci řídicích a odhadovacích algoritmů na digitálních počítačích je výhodnější uvažovat diskrétní systém. Diferenciální rovnice (1.17) případně (1.18) je tedy třeba diskretizovat a za tímto účelem bude v textu užito Eulerovy metody, kdy je derivace nahrazena dopřednou diferencí. Toto diskretizační schéma je sice méně přesné, ale oproti tomu je jednoduché na výpočet a tedy odstatečně rychlé. Diskretizační časový krok je totiž volen s ohledem na reálný systém, kde odpovídá vzorkovací frekvenci použitých senzorů. To je obvykle velmi krátký časový okamžik (řádově sto mikrosekund) a chyba v důsledku diskretizace Eulerovou metodou tedy není velká. Významnějším důvodem pro tuto metodu je však uvažování praktické aplikace v reálném čase, kdy je třeba v průběhu jedné vzorkovací periody vypočítat odhad stavových veličin a následně řídicí zásah. Jednodušší diferenční rovnice, znamenají jednodušší popis systému a tedy rychlejší výpočet všech uvažovaných algoritmů nezbytný pro potenciální nasazení v reálné aplikaci.

S užíváním diferenčních rovnic jsou však spojeny jisté komplikace. Zatímco diferenciální rovnice popisující PMSM (1.17) a (1.18) lze libovolně převádět mezi jednotlivými souřadnými systémy pomocí vztahů (1.1) a (1.2), pro odpovídající rovnice diferenční to

pravda není a jejich převod transformacemi (1.1) a (1.2) nedává vždy dobrý výsledek. Pro odvození diferenčních rovnic v konkrétní souřadné soustavě je tedy třeba postupovat ve dvou krocích. Nejprve převést vybranou soustavu rovnic (1.17) nebo (1.18) do zvolené souřadné soustavy. Následně je pak možné provést diskretizaci.

Prvním krokem při návrhu řízení motoru je obvykle zvládnutí řízení stroje bez zátěže. Z tohoto důvodu je často uvažován nulový zátěžný moment a proto pro něj budou obvykle uvedeny rovnice zvlášť.

Diskrétní rovnice pro stejné indukčnosti v souřadné soustavě $\alpha - \beta$

Pro odvození těchto rovnic vyjdeme ze soustavy diferenciálních rovnic (1.17)

$$\begin{aligned}\frac{di_\alpha}{dt} &= -\frac{R_s}{L_s}i_\alpha + \frac{\psi_{pm}}{L_s}\omega \sin \vartheta + \frac{1}{L_s}u_\alpha \\ \frac{di_\beta}{dt} &= -\frac{R_s}{L_s}i_\beta - \frac{\psi_{pm}}{L_s}\omega \cos \vartheta + \frac{1}{L_s}u_\beta \\ \frac{d\omega}{dt} &= \frac{k_p p_p^2 \psi_{pm}}{J} (i_\beta \cos \vartheta - i_\alpha \sin \vartheta) - \frac{p_p}{J} T_L - \frac{B}{J} \omega \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= \omega\end{aligned}$$

a užijeme zmiňované Eulerovy metody. Derivaci tedy nahradíme konečnou diferencí

$$\frac{dx}{dt}(t) = \frac{x_{t+1} - x_t}{\Delta t}$$

kde Δt představuje diskretizační časový krok. Po úpravě je výsledná diskrétní soustava rovnic ve tvaru

$$\begin{aligned}i_{\alpha,t+1} &= \left(1 - \frac{R_s}{L_s} \Delta t\right) i_{\alpha,t} + \frac{\psi_{pm} \Delta t}{L_s} \omega_t \sin \vartheta_t + \frac{\Delta t}{L_s} u_{\alpha,t} \\ i_{\beta,t+1} &= \left(1 - \frac{R_s}{L_s} \Delta t\right) i_{\beta,t} - \frac{\psi_{pm} \Delta t}{L_s} \omega_t \cos \vartheta_t + \frac{\Delta t}{L_s} u_{\beta,t} \\ \omega_{t+1} &= \left(1 - \frac{B}{J} \Delta t\right) \omega_t + \frac{k_p p_p^2 \psi_{pm}}{J} \Delta t (i_{\beta,t} \cos \vartheta_t - i_{\alpha,t} \sin \vartheta_t) - \frac{p_p}{J} T_L \Delta t \\ \vartheta_{t+1} &= \vartheta_t + \omega_t \Delta t\end{aligned}$$

Pro zjednodušení zavedeme následující značení

$$\begin{aligned}a &= 1 - \frac{R_s}{L_s} \Delta t \\ b &= \frac{\psi_{pm}}{L_s} \Delta t \\ c &= \frac{\Delta t}{L_s} \\ d &= 1 - \frac{B}{J} \Delta t \\ e &= \frac{k_p p_p^2 \psi_{pm}}{J} \Delta t\end{aligned} \tag{1.19}$$

a předpokládáme-li zátěžný moment nulový $T_L = 0$, rovnice pak přejdou na tvar

$$\begin{aligned}
 i_{\alpha,t+1} &= ai_{\alpha,t} + b\omega_t \sin \vartheta_t + cu_{\alpha,t} \\
 i_{\beta,t+1} &= ai_{\beta,t} - b\omega_t \cos \vartheta_t + cu_{\beta,t} \\
 \omega_{t+1} &= d\omega_t + e(i_{\beta,t} \cos \vartheta_t - i_{\alpha,t} \sin \vartheta_t) \\
 \vartheta_{t+1} &= \vartheta_t + \omega_t \Delta t
 \end{aligned} \tag{1.20}$$

Diskrétní rovnice pro stejné indukčnosti v souřadné soustavě $d - q$

Opět vyjdeme ze soustavy diferenciálních rovnic (1.17)

$$\begin{aligned}
 \frac{di_{\alpha}}{dt} &= -\frac{R_s}{L_s}i_{\alpha} + \frac{\psi_{pm}}{L_s}\omega \sin \vartheta + \frac{1}{L_s}u_{\alpha} \\
 \frac{di_{\beta}}{dt} &= -\frac{R_s}{L_s}i_{\beta} - \frac{\psi_{pm}}{L_s}\omega \cos \vartheta + \frac{1}{L_s}u_{\beta} \\
 \frac{d\omega}{dt} &= \frac{k_p p_p^2 \psi_{pm}}{J}(i_{\beta} \cos \vartheta - i_{\alpha} \sin \vartheta) - \frac{p_p}{J}T_L - \frac{B}{J}\omega \\
 \frac{d\vartheta}{dt} &= \omega
 \end{aligned}$$

a pomocí průvodičného vztahu (1.2) transformujeme první dvě rovnice ze souřadné soustavy $\alpha - \beta$ do $d - q$:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}(i_d \cos \vartheta - i_q \sin \vartheta) &= -\frac{R_s}{L_s}(i_d \cos \vartheta - i_q \sin \vartheta) + \frac{\psi_{pm}}{L_s}\omega \sin \vartheta + \frac{1}{L_s}(u_d \cos \vartheta - u_q \sin \vartheta) \\
 \frac{d}{dt}(i_d \sin \vartheta + i_q \cos \vartheta) &= -\frac{R_s}{L_s}(i_d \sin \vartheta + i_q \cos \vartheta) - \frac{\psi_{pm}}{L_s}\omega \cos \vartheta + \frac{1}{L_s}(u_d \sin \vartheta + u_q \cos \vartheta)
 \end{aligned} \tag{1.21}$$

Upravíme derivace v předchozích dvou rovnicích (1.21)

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}(i_d \cos \vartheta - i_q \sin \vartheta) &= \frac{di_d}{dt} \cos \vartheta - \frac{di_q}{dt} \sin \vartheta - i_d \omega \sin \vartheta - i_q \omega \cos \vartheta \\
 \frac{d}{dt}(i_d \sin \vartheta + i_q \cos \vartheta) &= \frac{di_d}{dt} \sin \vartheta + \frac{di_q}{dt} \cos \vartheta + i_d \omega \cos \vartheta - i_q \omega \sin \vartheta
 \end{aligned}$$

a nyní zřejmě získáme diferenciální rovnici pro i_d vynásobením první rovnice (1.21) hodnotou $\cos \vartheta$ a přičtením druhé rovnice (1.21) násobené $\sin \vartheta$. Obdobně rovnici pro i_q získáme násobením první rovnice (1.21) hodnotou $-\sin \vartheta$ a přičtením druhé rovnice (1.21) násobené $\cos \vartheta$. Upravené diferenciální rovnice pro i_d a i_q jsou ve tvaru

$$\begin{aligned}
 \frac{di_d}{dt} &= -\frac{R_s}{L_s}i_d - i_q \omega + \frac{u_d}{L_s} \\
 \frac{di_q}{dt} &= i_d \omega - \frac{R_s}{L_s}i_q - \frac{\psi_{pm}}{L_s}\omega + \frac{u_q}{L_s}
 \end{aligned}$$

Rovnici pro otáčky ω lze snadno transformovat na základě faktu, že výraz $i_{\beta} \cos \vartheta - i_{\alpha} \sin \vartheta$ přímo odpovídá i_q a tedy

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{k_p p_p^2 \psi_{pm}}{J}i_q - \frac{B}{J}\omega - \frac{p_p}{J}T_L$$

Rovnice popisující změnu polohy v čase je samozřejmě stejná

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \omega$$

Provedení diskretizace je analogické jako v předchozím odstavci pro soustavu v $\alpha - \beta$ souřadnicích a výsledkem je následující soustava diskrétních rovnic

$$\begin{aligned} i_{d,t+1} &= \left(1 - \frac{R_s}{L_s} \Delta t\right) i_{d,t} + \Delta t \cdot i_{q,t} \omega_t + \frac{\Delta t}{L_s} u_{d,t} \\ i_{q,t+1} &= \left(1 - \frac{R_s}{L_s} \Delta t\right) i_{q,t} - \Delta t \cdot i_{d,t} \omega_t - \frac{\psi_{pm} \Delta t}{L_s} \omega_t + \frac{\Delta t}{L_s} u_{q,t} \\ \omega_{t+1} &= \left(1 - \frac{B}{J} \Delta t\right) \omega_t + \Delta t \frac{k_p p_p^2 \psi_{pm}}{J} i_{q,t} - \frac{p_p}{J} T_L \Delta t \\ \vartheta_{t+1} &= \vartheta_t + \omega_t \Delta t \end{aligned}$$

Při použití stejného zjednodušujícího značení (1.19) a předpokladu nulového zátěžného momentu jsou rovnice ve tvaru

$$\begin{aligned} i_{d,t+1} &= a i_{d,t} + \Delta t \cdot i_{q,t} \omega_t + c u_{d,t} \\ i_{q,t+1} &= a i_{q,t} - \Delta t \cdot i_{d,t} \omega_t - b \omega_t + c u_{q,t} \\ \omega_{t+1} &= d \omega_t + e i_{q,t} \\ \vartheta_{t+1} &= \vartheta_t + \omega_t \Delta t \end{aligned} \tag{1.22}$$

Diskrétní rovnice pro různé indukčnosti v souřadné soustavě $d - q$

Nyní vyjdeme ze soustavy diferenciálních rovnic (1.18)

$$\begin{aligned} \frac{di_d}{dt} &= -\frac{R_s}{L_d} i_d + \frac{L_q}{L_d} i_q \omega + \frac{1}{L_d} u_d \\ \frac{di_q}{dt} &= -\frac{R_s}{L_q} i_q - \frac{L_d}{L_q} i_d \omega - \frac{\psi_{pm}}{L_q} \omega + \frac{1}{L_q} u_q \\ \frac{d\omega}{dt} &= \frac{k_p p_p^2}{J} ((L_d - L_q) i_d i_q + \psi_{pm} i_q) - \frac{p_p}{J} T_L - \frac{B}{J} \omega \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= \omega \end{aligned}$$

a diskretizaci provedeme opět stejným způsobem pomocí Eulerovy metody. Popis PMSM pomocí diferenčních rovnic v souřadné soustavě $d - q$ při uvažování různých indukčností L_d a L_q nyní bude

$$\begin{aligned} i_{d,t+1} &= \left(1 - \frac{R_s}{L_d} \Delta t\right) i_{d,t} + \frac{L_q \Delta t}{L_d} i_{q,t} \omega_t + \frac{\Delta t}{L_d} u_{d,t} \\ i_{q,t+1} &= \left(1 - \frac{R_s}{L_q} \Delta t\right) i_{q,t} - \frac{L_d \Delta t}{L_q} i_{d,t} \omega_t - \frac{\psi_{pm} \Delta t}{L_q} \omega_t + \frac{\Delta t}{L_q} u_{q,t} \\ \omega_{t+1} &= \left(1 - \frac{B}{J} \Delta t\right) \omega_t + \frac{k_p p_p^2 \Delta t}{J} ((L_d - L_q) i_{d,t} i_{q,t} + \psi_{pm} i_{q,t}) \\ \vartheta_{t+1} &= \vartheta_t + \omega_t \Delta t \end{aligned} \tag{1.23}$$

Příčemž zátěžný moment T_L je opět považován za nulový, ale další zjednodušující označení konstant v tomto případě zavedeno nebude.

Diskrétní rovnice pro různé indukčnosti v souřadné soustavě $\alpha - \beta$

Postup odvození těchto rovnic je podobný jako v případě rovnic v soustavě $d - q$ pro stejné indukčnosti. Do soustavy (1.18) jsou dosazeny proudy transformované pomocí (1.1) a následně jsou první dvě rovnice násobeny $\sin \vartheta$ nebo $\cos \vartheta$ a sečteny, případně odečteny. Výsledné vztahy v soustavě $\alpha - \beta$ mají ale poměrně komplikovaný zápis a proto nebudou uváděny přímo zde v textu, lze je však nalézt v příloze.

1.2.5 Stochastický model

Lze samozřejmě očekávat, že výše odvozené rovnice nevystihují chování reálného stroje zcela přesně. Tento fakt má celou řadu nejrůznějších příčin, které nelze obecně odstranit. Místo toho je lepší uvažovat jistou míru nepřesnosti užívaných rovnic a modelovat ji jako šum.

Hlavní příčiny neurčitosti v PMSM

Následující popis neurčitostí v PMSM způsobující nepřesnost modelu vychází z [38] (**případně najít další zdroje**):

Nepřesnost rovnic popisujících reálný stroj:

- zanedbání složitějších efektů v modelu jako závislost parametrů na teplotě nebo saturace magnetickým tokem
- nejsou známy přesné hodnoty parametrů stroje
- vliv neznámého zátěžného momentu
- vliv diskretizace rovnic a užití jednoduché Eulerovy metody

Vliv užití reálných zařízení:

- chyby měření a zaokrouhlovací chyby senzorů
- skutečná napětí ve stroji se liší od požadovaných v důsledku napájecí elektroniky (PWM, invertor)
 - efekt mrtvých časů
 - nelineární úbytky napětí v důsledku voltamperové charakteristiky napájecí elektroniky
- nedokonalosti samotného motoru – zařízení není nikdy vyrobeno přesně, výskyt nesymetrií a anizotropických vlastností rotoru nebo samotných permanentních magnetů

V důsledku bezsenzorového návrhu pak dále přibývá neznalost:

- počáteční polohy
- polohy při provozu stroje
- velikosti otáček při provozu stroje
- směru otáčení – která ze symetrických verzí (ω, ϑ) a $(-\omega, \vartheta + \pi)$ je realizována

Použitý šum

Seznam výše popsaných vlivů způsobujících nepřesnost uvažovaného modelu stroje se pokusíme zahrnout pod vhodný model šumu. Skutečný šum, který by se vyskytoval na reálném stroji, lze očekávat velmi komplikovaný a jeho popis není ani prakticky realizovatelný. Výhodnější tedy je uvažovat některý z klasických modelů šumu a jeho parametry nastavit tak, aby co nejlépe zachycoval průběh neurčitosti.

V tomto textu bude uvažován model aditivního vzájemně nezávislého bílého Gaussovského šumu. Jedná se sice o relativně jednoduchý model šumu, ale jeho výhodou je, že pro něj existuje celá řada efektivních algoritmů. Střední hodnota pro šum bude uvažována nulová a kovarianční matice je nutno vhodně zvolit s ohledem na výše popsané neurčitosti. K této volbě lze přistupovat buď na základě odhadu parametrů normálního rozdělení, detailněji popsáno v [38], nebo je lze volit experimentálně.

Zmiňovaný šum bude uvažován obecně dvou typů. Jedná se šum v samotném systému, který odráží především chyby modelu. Budeme předpokládat, že tento šum se projevuje v odvozených rovnicích (1.17) a (1.18) pro popis stavu systému, případně v některé jejich diskrétní verzi. Druhý typ šumu bude reprezentovat chybu měření a bude mít přímý vliv na měřené veličiny.

1.3 Bezsenzorový návrh

1.3.1 Mechanické veličiny a senzory

Jak je patrné z výše odvozeného modelu PMSM, když chceme stroj dobře řídit, je potřeba znát s dostatečnou přesností fyzikální veličiny, které zachycují jeho stav v daném časovém okamžiku. Jako tyto veličiny v základu volíme elektrické proudy a napětí a dále pak polohu rotoru a rychlost jeho otáčení. Získat dostatečně přesné hodnoty těchto veličin však není vždy zcela jednoduché.

U elektrických proudů na výstupu stroje předpokládáme, že je měříme s dostatečnou přesností. Elektrická napětí na vstupu předpokládáme známá, protože se obvykle jedná o řídicí veličiny. Je však třeba poznamenat, že napětí požadovaná řídicím algoritmem a skutečná napětí dodaná napájecí elektronikou se mohou často značně lišit. Vliv a řešení tohoto konkrétního problému bude podrobněji diskutován dále v textu ([odkaz](#)).

Získání hodnot mechanických veličin v reálném čase je v praxi mnohem komplikovanější. Je totiž třeba užít speciálních senzorů jako například: pulzní snímače na principu vhodného kódu [35], Hallovy senzory [27] nebo rezolvery [22, 35]. Pro praktické aplikace

je však třeba ekonomických, robustních a kompaktních motorů a využití senzorů přináší obecně mnoho nevýhod jako například [36, 56]:

- větší hardwarová složitost zařízení, více vodičů, sběrnic a konektorů, větší rozměry
- vyšší cena, vliv na životní cyklus výrobku
- menší spolehlivost a menší odolnost proti šumu
- nutno řešit negativní vlivy na senzory: elektromagnetické pole, oscilace, vysoké rychlosti a teploty
- vyšší nároky na údržbu
- menší robustnost, problém při selhání senzoru, je-li motor současně využíván i jako brzda (detailněji [54])

Je tedy snahou se užití senzorů vyhnout a k určování polohy a otáček rotoru využít jiných, *bezsenzorových*, metod. Ty jsou obvykle založeny na speciálním algoritmu, který odhaduje hodnoty mechanických veličin z hodnot veličin elektrických.

S bezsenzorovými metodami byly na počátku spojeny problémy s výpočetní náročností. To se však změnilo s dostupností moderních výkoných elektronických prvků umožňujících implementaci náročnějších algoritmů a tím byl umožněn rozvoj bezsenzorového řízení. V posledních letech tak byl současně v akademické i průmyslové sféře odstartován intenzivní výzkum na poli pokročilých řídicích strategií. Pro komerční průmyslovou aplikaci je však bezsenzorový návrh rozumný, jen pokud se neprodrazí více než původně uvažované senzory. Nelze tedy bezsenzorový návrh příliš usnadnit přidáním dalších elektrických senzorů (například napěťových), užití nejvýkonějších dostupných procesorů, případně požadavkem na jinou nebo speciální konstrukci samotného motoru [36].

1.3.2 Přehled metod pro odhadování stavových veličin PMSM

K odhadování stavových veličin PMSM v bezsenzorovém návrhu je možno přistupovat z různých směrů a lze při tom využít mnoha specifických jevů. V důsledku toho byla vyvinuta celá řada více či méně úspěšných metod. Následující přehled hlavních reprezentantů těchto metod čerpá svoji osnovu z [56], ta je doplněna z [23] a dále o konkrétní příklady z dalších zdrojů.

1.3.3 Metody založené na otevřené smyčce

Nejdříve budou uvedeny nejjednodušší metody odhadování stavových veličin založené na otevřené smyčce.

Přímý výpočet

Požadované veličiny (poloha a otáčky) jsou přímo vyjádřeny a vypočteny z rovnic popisujících PMSM. Jedná se o přímočarou a jednoduchou metodu s velmi rychlou dynamickou odezvou. Není třeba užití komplikovaného pozorovatele, nicméně metoda je velmi citlivá na chyby měření, šum a nepřesné určení parametrů stroje.

Výpočet statorové indukčnosti

Používá se pro IPMSM, kde indukčnost statorových fází je funkcí polohy rotoru. Poloha rotoru je tedy vypočtena z napětí a proudu ve statorové fázi. Problémy nastávají v důsledku nepřesného výpočtu indukčnosti a dále při saturaci magnetickým tokem, kdy metoda poskytuje špatné výsledky.

Integrace zpětné elektromotorické síly

Metoda využívá toho, že v synchronním stroji rotuje statorový a rotorový tok synchronně a tedy ze znalosti statorového toku lze vypočítat, na základě rovnic stroje, úhel rotorového toku, tedy polohu hřídele. Problém tohoto přístupu je především v citlivosti na chyby a (především teplotní) změny rezistance statoru. Dále metoda funguje špatně při nízkých otáčkách.

Rozšířená elektromotorická síla

Jedná se především o rozšíření konceptu zpětné elektromotorické síly na IPMSM, kde navíc vystupují rozdílné indukčnosti. Umožňuje tedy užití metod pro SMPMSM založených na EMF i pro IPMSM.

1.3.4 Metody s uzavřenou smyčkou

Předchozí metody založené na otevřené smyčce jsou limitovány především přesností, s jakou uvažované parametry v modelu odpovídají skutečným hodnotám stroje. Obzvláště při nízkých otáčkách se chyby parametrů mohou nepříznivě ovlivňovat dynamiku systému. Užitím pozorovatelů založených na uzavřené smyčce lze zvýšit robustnost proti nepřesnému určení parametrů, ale i proti šumu v systému obecně [23].

Rozšířený Kalmanův filtr

Tato metoda poskytuje ve srovnání s ostatními velmi dobré výsledky, je méně ovlivněna šumem měření a nepřesností parametrů. Je asi nejpoužívanějším nelineárním pozorovatelem pro odhadování stavových veličin PMSM. Popis jeho aplikace lze nalézt například v [5, 6, 7, 38]. Problematičtější je nutnost vhodné volby kovariančních matic. Dále je třeba vyřešit problém s konvergencí ke špatnému řešení (symetrie (ω, ϑ) a $(-\omega, \vartheta + \pi)$). Užití rozšířeného Kalmanova filtru je také komplikovanější pro IPMSM s různými indukčnostmi kvůli složitějšímu popisu. Dalšími nevýhodami jsou vyšší výpočetní a časová náročnost. Detailnímu popisu algoritmu rozšířeného Kalmanova filtru a jeho následné aplikaci na PMSM bude věnována zvláštní pozornost dále v textu (část 2.5.1) a (**odkaz**).

MRAS (Model Reference Adaptive System)

Algoritmus využívá redundance dvou různých modelů stroje k určení stejných veličin z jiné množiny vstupů. Chyba mezi estimovanými veličinami jednotlivých modelů je pak úměrná úhlovému posunu mezi dvěma odhadovanými vektory magnetického toku a tedy

i úhlu natočení stroje. Tato chyba je pak obvykle minimalizována PI regulátorem. Příkladem je využití napěťového modelu a proudového modelu k určení chyby magnetického toku, ze které je určena rychlost. Jinou možností je užít jako jeden z modelů samotný PMSM. Nevýhodou této metody je silná závislost na přesnosti parametrů stroje, obzvláště na rezistanci statoru.

Jednoduché adaptivní řízení

Návrh pro případ známé velikosti toku permanentních magnetů. Výhodou je zvládnutí kompenzace konstantní posun napětí, avšak má problémy při nízkých otáčkách.

Klouzavý pozorovatel (sliding mode observer)

Přístup zajišťuje nulovou chybu odhadovaného statorového proudu. Dále pak rekonstruuje zpětnou elektromotorickou sílu a vypočítává z ní polohu rotoru. Opět má problémy při nízkých otáčkách. Existuje i iterativní verze klouzavého pozorovatele, viz například [25].

1.3.5 Metody založené na neideálních vlastnostech motoru

Jejich výhodou je především odstranění kritické závislosti na velikosti zpětné elektromotorické síly úměrné otáčkám stroje. Tyto metody jsou tedy navrhovány se zaměřeným užitím především pro nízké a nulové otáčky.

Vyskofrekvenční (HF) injektáž

Metoda je založena na vlastnosti magnetických „výčnělků“ (saliency) především u IPMSM, případně na lokálních anizotropiích v důsledku saturace magnetickým tokem typicky pro SMPMSM. Detailněji se základní metodou injektáže zabývají v [4, 22, 24].

Injektovaný signál je přiváděn na vstup stroje spolu s řízením. Generuje točivé nebo střídavé pole ve specifickém, předem určeném prostorovém směru. Tyto dva rozdílné přístupy jsou také označovány jako „rotující napěťový vektor“ a „pulzující napěťový vektor“ v tomto pořadí. Jejich srovnání a aplikaci na oba typy PMSM (SM- a I-) lze nalézt v [3, 26].

Přídavný injektovaný signál je označován jako „nosný“ a je periodický o dané frekvenci vzhledem k času nebo prostoru. Nosný signál je modulován aktuální prostorovou orientací anizotropií stroje a následně je signál extrahován z výstupu stroje a demodulován. Tím postupem je obecně získávána hodnota úhlu natočení.

Výhodné je injektovat do d osy, kde nedochází k rušení momentu. Dále injektáží do d osy lze užít saturace tokem pro motory s nevýraznými výstupky, což však není vhodné pro aplikace při silném zatížení. Další možností je injektovat ve statorových souřadnicích $\alpha - \beta$.

Výhodou injektáží je necitlivost k nepřesné znalosti parametrů stroje. Například články [30, 31] představují injektážní metodu, která nepotřebuje znát parametry stroje. V případě [31] se navíc snaží kompenzovat i negativní vliv invertoru a rozšířit schopnost de-

tekce anizotropií i na velmi malé nepravidelnosti typické pro SMPMSM. Nevýhodou injektážních metod je spotřeba jistého množství napětí, což snižuje dostupné maximální napětí. Dalším nedostatkem je užití digitálních filtrů pro zpracování a špatný dynamický výkon v důsledku jejich užití.

Injektáž velmi vysokých frekvencí

Tento relativně nový postup prezentovaný v [39] nedetekuje anizotropie v důsledku saturace případně anizotropie samotného rotoru. Místo toho je založena na neideálních vlastnostech (anizotropiích) samotných permanentních magnetů. Z tohoto důvodu ji lze využít v případech kdy ostatní metody selhávají, například z důvodu nepřítomnosti klasických anizotropií. Pro správnou funkčnost metody je však nutné užití velmi vysokých frekvencí v řádu stovek kHz . Nevýhodou je nutnost volby optimální hodnoty frekvence specificky pro konkrétní typ magnetu. Dále pak to, že se jedná o relativně novou metodu, která zatím není detailněji prozkoumána.

Nízkofrekvenční (LF) injektáž

Nízkofrekvenční injektáž je založena na injektování nízké frekvence do d osy, to způsobí změnu v otáčkách indikující chybu odhadu a z ní je pak možné odhadnout polohu. Metoda je založena na jiném principu než vysokofrekvenční injektáže a výstupky již nejsou nutnou podmínkou pro její funkčnost. Použitelnost tohoto přístupu závisí na momentu setrvačnosti stroje a pro jeho velké hodnoty selháva. Dalším nedostatkem pak je pomalá dynamická odezva.

INFORM (Indirect flux detection by on-line reactance measurement)

Jedná se o metodu použitelnou pro určení polohy PMSM při nízkých a nulových otáčkách. Je založena na měření proudové odezvy vyvolané přepínáním invertoru s pulzně-šířkovou modulací (PWM) a užitím těchto proudů k výpočtu polohy rotoru. Výhodou je jednoduchý výpočet a dále, že není třeba rovnic pro motor a tedy metoda je necitlivá na změnu/nepřesné hodnoty parametrů. Oproti tomu je však citlivá na chyby toku, které způsobují špatný odhad. Další nevýhodou této metody je rušení proudů v ustáleném stavu.

1.3.6 Detekce počáteční polohy

Pro hladký start PMSM je třeba znát počáteční polohu. Obvyklým postupem je užití vhodné excitace stroje k získání této informace. Hlavní užívané možnosti excitace jsou:

Užití impulzního napětí

Postup je založen na sycení a změně indukčnosti statoru s pozicí magnetů na rotoru. Za klidu jsou do statorových fází aplikovány napěťové pulzy a z proudů je následně vypočítána informace o poloze. Příkladem může být technika představená v [45], která nevyžaduje znalost parametrů stroje a je možno ji aplikovat i na SMPMSM.

Testovací napěťové vektory

Napěťové vektory v různých prostorových směrech jsou aplikovány do stroje a je měřena proudová odezva. Nejvyšší odezva pak indikuje pozici rotoru. Funkčnost metody je založena na saturaci statorového jádra.

Vysokofrekvenční (HF) testovací signál

Počáteční poloha je získávána z odezvy na injektovaný proudový nebo napěťový vysokofrekvenční signál.

1.3.7 Kombinace metod

Vzhledem k tomu, že každá z výše uvedených metod má své nedostatky, nejlepších výsledků je dosahováno jejich vhodnou kombinací. Kombinování metod však přináší nové problémy, které je třeba řešit. Obecně komplikuje celý návrh a ten se tak stává složitějším. Velkým problémem je nutnost navrhnout správné napojení a součinnost jednotlivých kombinovaných metod.

V [5] představují bezsenzorové řízení založené na EKF pozorovateli ve spojení s PI regulátory. To nepotřebuje znát počáteční natočení rotoru ani zátěžný moment. PI regulátor napětí lze nastavit se zamčeným rotorem a ve zmiňovaném zdroji je řešen i problém s rozpoznáním signálu ω .

Článek [6] je také zaměřen na využití EKF, nyní však v případě IPMSM. Návrh je komplikovanější v důsledku uvažování anizotropií stroje, autoři se jí však snaží využít k vylepšení výkonu systému.

V [50] využívají řízení založené na klouzavém pozorovateli, kde si ale navíc při nízkých otáčkách $\omega \approx 0$ pomáhají injektováním stejnosměrného proudu do d osy. Nevyužívají však anizotropií ani nijak zvlášť neanalyzují injektovaný signál.

Hybridní metody s injektáží

Jako hybridní metody budou v textu označovány kombinace nejčastěji používaných přístupů pro PMSM, tedy injektáží a technik založených na zpětné elektromotorické síle. Užití injektáží je vhodné pro nízké a nulové otáčky, zatímco ve vyšších rychlostech způsobuje nežádoucí rušení. Oproti tomu přístupy využívající zpětnou elektromotorickou sílu fungují při vyšších otáčkách dobře a pro nízké selhávají. Je tedy nasnadě oba typy metod vhodným způsobem zkombinovat a získat tak způsob jak odhadovat stavových veličin v celém rozsahu rychlostí stroje. Základní idea tedy je při nízkých otáčkách využívat odhadů z injektáží a při zvýšení otáček injektáže vypnout, aby nezpůsobovali rušení a dále se řídit jen na základě odhadů ze zpětné elektromotorické síly. Tento postup je použit v [41], kdy jako estimátor používají adaptivního pozorovatele s referenčním modelem, který je pro nízké otáčky doplněn základním návrhem injektáže.

Důležitou součástí těchto metod je způsob, jakým se vyřeší „bezproblémový“ přechod z jednoho estimátoru na jiný. V [48] je to například řešeno tak, že stále užívají estimátor rotorového toku založený na indukovaných napětích. V nízkých otáčkách je pak doplňován

injektáží, ta s rostoucími otáčkami postupně vymizí. Obdobně v [40] je užit estimátor založený na napěťovém modelu, v nízkých otáčkách je přidána vysokofrekvenční injektáž. Amplituda injektáže s rostoucími otáčkami lineárně klesá a navíc je nad určitou mezní rychlostí úplně vypnuta.

Hybridní metody jsou samozřejmě dále vylepšovány. Například v [42] uzpůsobí standardní hybridní metodu, zejména její injektážní část, aby fungovala i s invertorem vybaveným na výstupu LC filtrem. Toho se užívá zejména k odstranění problému ve střídavých strojích v důsledku napájení nesinusovým napětím z invertoru s pulzně šířkovou modulací.

Užití více modelů

Poměrně dobrých výsledků je také dosahováno při použití metod užívajících více současně běžících modelů. Z těchto modelů je pak nějakým způsobem vybrán nejlepší, případně je z nich přímo počítán odhad stavových veličin. Nevýhody tohoto přístupu jsou zřejmé, především se jedná o velkou výpočetní náročnost způsobenou právě současným během více modelů. Příkladem může být sekvenční metoda Monte Carlo označovaná také jako Particle Filter. (citace)

1.3.8 Přiblížení metody vysokofrekvenční injektáží

V tomto odstavci bude přiblížen základní princip fungování vysokofrekvenčních injektáží pro PMSM s různými indukčnostmi L_d a L_q . Popis je založeno na [32, 21]. Uvažována bude injektáž označovaná jako *pulzující napěťový vektor*, kdy je injektáž prováděna v rotorové souřadné soustavě $d-q$. Konkrétně je do estimované osy d injektována harmonický signál

$$u_d^{inj} = A_{inj} \cos(\omega_{inj}t)$$

kde A_{inj} je amplituda injektovaného signálu a ω_{inj} pak jeho frekvence. Odezva je získávána z proudu v estimované ose q .

Vyjdeme z prvních dvou rovnic ze soustavy rovnic (1.18) a dále aplikujeme následující předpoklady [32]:

1. frekvence injektovaného signálu je dostatečně velká oproti uvažované frekvenci otáčení stroje $\omega_{inj} \gg \omega$
2. otáčky jsou dostatečně nízké, aby byla zanedbatelná zpětná elektromotorická síla a poklesy napětí v důsledku rezistance obvodu
3. uvažujeme pouze jednoduchou anizotropii, zde reprezentovanou rozdílnými indukčnostmi $L_d \neq L_q$

Na základě těchto předpokladů je možno vyloučit interakci vysokofrekvenčního signálu s „mechanickou“ částí stroje a zjednodušit původní rovnice na vysokofrekvenční model

stroje ve tvaru

$$\begin{aligned}\frac{di_d}{dt} &= \frac{1}{L_d}u_d \\ \frac{di_q}{dt} &= \frac{1}{L_q}u_q\end{aligned}\tag{1.24}$$

Dále zaveďme označení, kdy ϑ reprezentuje skutečný úhel natočení rotoru, $\hat{\vartheta}$ jeho odhad a veličina θ představuje chybu tohoto odhadu $\theta = \vartheta - \hat{\vartheta}$.

Průběh injecktáže je pak následující:

1. injecktování vysokofrekvenčního signálu do estimované osy d (označíme jako \hat{d})

$$\begin{aligned}\tilde{u}_{\hat{d}} &= u_{\hat{d}} + A_{inj} \cos(\omega_{inj}t) \\ \tilde{u}_{\hat{q}} &= u_{\hat{q}}\end{aligned}$$

kde u značí řídicí zásah navržený regulátorem, tedy bez injecktáže, a \tilde{u} řídicí zásah s injecktáží

2. provedeme transformaci z estimovaného rotorového $d-q$ do (skutečného) statorového $\alpha-\beta$ souřadného systému pomocí vztahu (1.2), tedy rotaci o $\hat{\vartheta}$:

$$\begin{aligned}\tilde{u}_{\alpha} &= u_{\alpha} + A_{inj} \cos(\omega_{inj}t) \cos \hat{\vartheta} \\ \tilde{u}_{\beta} &= u_{\beta} + A_{inj} \cos(\omega_{inj}t) \sin \hat{\vartheta}\end{aligned}$$

kde $u_{\alpha\beta}$ představují zjednodušené označení pro transformované původní řídicí zásahy $u_{\hat{d}\hat{q}}$

3. řídicí zásahy $\tilde{u}_{\alpha\beta}$ jsou použity ve stroji, ten je reprezentován rovnicemi vysokofrekvenčního modelu (1.24) v souřadné soustavě $d-q$ a proto provedeme transformaci (1.1), nyní ale se skutečnou hodnotou ϑ , protože uvažujeme, že ta je samotnému stroji (případně jeho simulátoru) známa, výsledkem jsou řídicí zásahy

$$\begin{aligned}\tilde{u}_d &= u_d + A_{inj} \cos(\omega_{inj}t) \cos \hat{\vartheta} \cos \vartheta + A_{inj} \cos(\omega_{inj}t) \sin \hat{\vartheta} \sin \vartheta \\ \tilde{u}_q &= u_q - A_{inj} \cos(\omega_{inj}t) \cos \hat{\vartheta} \sin \vartheta + A_{inj} \cos(\omega_{inj}t) \sin \hat{\vartheta} \cos \vartheta\end{aligned}$$

kde opět u_{dq} značí řídicí zásah navržený regulátorem, tedy bez injecktáže, a \tilde{u}_{dq} řídicí zásah s injecktáží, nyní však ve skutečné souřadné soustavě $d-q$ a nikoliv v estimované

4. řídicí zásahy \tilde{u}_{dq} nyní aplikujeme ve vysokofrekvenčním modelu (1.24) a vypočteme proudy i_{dq} , kdy se v podstatě jedná o integraci, dále provedeme zjednodušení výsledných vztahů pomocí základních goniometrických vzorců a uijeme označení $\theta = \vartheta - \hat{\vartheta}$:

$$\begin{aligned}\tilde{i}_d &= i_d + \frac{A_{inj}}{L_d \omega_{inj}} \sin(\omega_{inj}t) \cos \theta \\ \tilde{i}_q &= i_q - \frac{A_{inj}}{L_q \omega_{inj}} \sin(\omega_{inj}t) \sin \theta\end{aligned}$$

kde \tilde{i}_{dq} představuje proudy na výstupu a pod označení i_{dq} byly zahrnuty zbývající členy z integrace, tedy integrace napětí u_{dq} a případné integrační konstanty

5. návrh systému předpokládá měření proudů ve statorových souřadnicích a tedy je nutné provést transformaci (1.2) do souřadného systému $\alpha - \beta$:

$$\begin{aligned}\tilde{i}_\alpha &= i_\alpha + \frac{A_{inj}}{\omega_{inj}} \sin(\omega_{inj}t) \left(\frac{\cos\theta \cos\vartheta}{L_d} + \frac{\sin\theta \sin\vartheta}{L_q} \right) \\ \tilde{i}_\beta &= i_\beta + \frac{A_{inj}}{\omega_{inj}} \sin(\omega_{inj}t) \left(\frac{\cos\theta \sin\vartheta}{L_d} - \frac{\sin\theta \cos\vartheta}{L_q} \right)\end{aligned}$$

kde jako $i_{\alpha\beta}$ označíme transformované proudy i_{dq}

6. dále je ještě třeba převést proudy pomocí transformace (1.1) do estimované rotorové souřadné soustavy $d - q$, ve které probíhá vyhodnocení

$$\begin{aligned}\tilde{i}_d &= i_d + \frac{A_{inj}}{\omega_{inj}} \sin(\omega_{inj}t) \left(\frac{\cos^2\theta}{L_d} + \frac{\sin^2\theta}{L_q} \right) \\ \tilde{i}_q &= i_q + \frac{A_{inj}}{\omega_{inj}} \sin(\omega_{inj}t) \left(\frac{\sin\theta \cos\theta}{L_d} - \frac{\sin\theta \cos\theta}{L_q} \right)\end{aligned}$$

7. následuje izolování modulovaného vysokofrekvenčního signálu na frekvenci ω_{inj} z proudu v estimované d ose, tento signál označíme i_q^{inj} a jeho hodnota v čase je

$$i_q^{inj} = \frac{A_{inj}}{\omega_{inj}} \sin(\omega_{inj}t) \sin\theta \cos\theta \left(\frac{1}{L_d} - \frac{1}{L_q} \right)$$

tedy na nosném vysokofrekvenčním signálu $\sin(\omega_{inj}t)$ je modulována hodnota

$$\frac{A_{inj}(L_q - L_d)}{2\omega_{inj}L_dL_q} \sin 2\theta \quad (1.25)$$

tento výsledek lze nalézt například v (**citace - ale bohužel všude jsem to našel se 4 místo 2** asi kvůli demodulaci násobením HF signálem)

Po demodulaci lze hodnoty (1.25) použít k získání lepšího odhadu polohy $\hat{\vartheta}$. Není však příliš vhodným získávat odhad ϑ z (1.25) přímým výpočtem, protože takovýto výsledek by byl velmi nepřesný. Je tomu tak proto, že samotná hodnota (1.25) je relativně nepřesná v důsledku demodulace a dále může být značně zatížena šumem. Výhodnější proto je použít vhodný zpětnovazební regulátor, například PI, a regulovat hodnotu (1.25) úměrnou chybě odhadu $\vartheta - \hat{\vartheta}$ na nulu.

Dále je třeba upozornit na nedostatky injektážní metody, které plynou ze zápisu (1.25). Především je zřejmá nezbytnost předpokladu $L_d \neq L_q$, protože v případě rovnosti je hodnota (1.25) zřejmě rovna nule. Dalším problémem je, že v (1.25) nevystupuje přímo hodnota θ , ale hodnota $\sin 2\theta$ a vztah je tedy nelineární. Budeme-li chtít využít lineární zpětnovazební regulátor pro regulaci θ na nulu, lze jej použít pouze pro malé výchylky θ , kdy dostatečně přesně platí aproximace $\sin x \approx x$. I v případě, že tento problém vyřešíme, metoda bude stále fungovat pouze pro odchylky θ v omezeném intervalu $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ v důsledku kratší periody funkce $\sin 2x$.

1.4 Metody řízení

Tato část bude věnována základním postupům užívaným pro řízení synchronních strojů. V případě zpětnovazebních strategií je nutno regulátoru poskytnout informace o stavu. Tato informace je v senzorovém návrhu získávána pomocí čidla, pro bezsenzorový návrh je třeba užít některý z přístupů zmiňovaných v předchozí části.

1.4.1 Požadavky pro řízení

Cílem řízení systému je obvykle dosažení optimální shody se zadanými požadavky. Ty jsou většinou reprezentovány referenčním signálem, který dostává regulátor na svůj vstup spolu s hodnotami pozorování systému. Pro mnoho regulátorů je obvyklé uvažovat jako referenční hodnotu nulu, příkladem může být PI regulátor nebo standartní lineárně kvadratický regulátor. Požadavek řízení na nulové hodnoty je pak třeba vhodně ošetřit. Příklad takového postupu představuje úprava lineárně kvadratického řízení pro PMSM v kapitole ([odkaz](#)).

Nejen pro PMSM ale pro motory obecně představuje obvykle referenční signál požadavek na otáčky. Další možností je požadovaný moment nebo případně požadovaná poloha u servomotorů. Přičemž posledně jmenovaná možnost řízení polohy zatím zřejmě není příliš vhodná ve spojení s bezsenzorovým PMSM kvůli problematice určování polohy v nízkých a nulových otáčkách.

1.4.2 Skalární řízení

Skalární řízení je často využíváno v asynchronních strojích, je však možné užít jej i pro PMSM. Detailněji je popsáno například v [53]. Jeho velkou výhodou je, že se jedná v podstatě o bezsenzorový návrh řízení, protože funguje na principu nezpětnovazebního řízení. Nevýhodou je pak závislost rychlosti na zátěžném momentu, horší dynamické vlastnosti a špatná regulace momentu. I přes zmíněné nevýhody toto řízení obvykle stačí na jednodušší aplikace jako pohon větráků, čerpadel nebo klimatizací [36].

Toto řízení je také označováno jako V/f nebo volt/herz řízení, protože regulovanou veličinou je právě poměr napětí a frekvence. Snahou řízení je udržet poměr napětí a frekvence konstantní. Úhlová rychlost rotoru může být určena nepřímo výpočtem z frekvence napájecího napětí. Tato hodnota může být považována za hodnotu skutečných otáček stroje, pokud zátěžný moment nepřesáhne kritickou hodnotu. Pro řízení ale skutečnou hodnotu otáček stroje znát nepotřebujeme, algoritmus totiž pracuje ve stručnosti následovně:

Z požadovaných otáček se určí frekvence f , ta slouží jako referenční signál pro regulátor. Ten pak řídí poměr napětí a frekvence V/f tak, aby byl konstantní. Na jeho výstupu získáme amplitudu napětí V . Řídící napětí pro PMSM v $\alpha - \beta$ souřadnicích je pak ve tvaru

$$\begin{aligned}u_{\alpha} &= V \cos(2\pi ft) \\u_{\beta} &= V \sin(2\pi ft)\end{aligned}$$

1.4.3 Přímé řízení momentu

Přímé řízení momentu (Direct Torque Control, DTC) se užívá, když je potřeba vysoký výkon vzhledem k dynamice momentu. Je řízen přímo moment stroje a základní princip je následující: Kruhová trajektorie statorového toku se rozdělí na šest symetrických částí. Velikosti vektorů statorového toku a elektromagnetického momentu v souřadnicích $\alpha - \beta$ je pak držena v předem stanovených mezích prostřednictvím vhodného spínání přímo jedné ze šesti kombinací na invertoru. [53, 37]

Touto metodou text již dále nezabývá a je zde uvedena jen pro úplnost.

1.4.4 Vektorové řízení

Jedná se asi o velmi často využívaný řídicí algoritmus. Je aplikován pro řízení v kombinaci s estimátorem založeným na zpětné elektromotorické síle, injektáži i v hybridních verzích v mnoha publikovaných textech jako [6, 9, 10, 24, 34, 38, 40, 42, 47].

Dle [53] vektorové řízení odstraňuje většinu nevýhod skalárního řízení a v porovnání s ním poskytuje velmi dobrý výkon. Jedná se o řízení zpětnovazební a umožňuje samostatné řízení toku i momentu, potřebuje však znát odhady stavových veličin stroje včetně mechanických.

Vektorové řízení je obvykle implementováno na základě vhodné kombinace PI regulátorů. Jinou možnost nabízí využít lineárně kvadratického regulátoru, který umožní daleko větší variabilitu návrhu. Jeho implementace v praxi je však komplikovaná z důvodu znatelně větší výpočetní náročnosti. Užití lineárně kvadratického regulátoru pro řízení PMSM není zatím v literatuře příliš zmiňováno, výjimkou je [33], kde ovšem neuvažují bezsensorový návrh.

V následujícím odstavci bude popsán PI regulátor a na něm založená implementace vektorového řízení. Popisu lineárně kvadratického přístupu bude věnována samostatná část v následující kapitole ([odkaz](#)) a jeho aplikace na PMSM pak bude uvedena dále v části ([odkaz](#)).

PI regulátor

PI (proporcionálně integrační) regulátor je jednoduchý systém, který v sobě kombinuje dvě základní části: Proporcionální část, což je ve své podstatě zesilovač a integrální část reprezentovanou integrátorem. V tomto systému se vyskytují dvě konstanty K_p a K_i , které je třeba vhodně nastavit. Základní implementace je následovná:

$$x_t = \text{PI}(e_t, K_p, K_i) = K_p e_t + K_i \int_0^t e_\tau d\tau$$

A v diskretní verzi pak

$$x_t = \text{PI}(e_t, K_p, K_i) = K_p e_t + K_i \sum_{k=0}^t e_k$$

Tento regulátor je výhodné užít v případě, kdy chceme vyregulovat e_k , obvykle reprezentující odchylku od požadované hodnoty, na nulu. V některých případech bychom si vystačili s proporcionální složkou, integrální složka však dodává lepší stabilitu a schopnost odstranit konstatní regulační odchylku. Cenou za to je pomalejší konvergence. **(citace)**

1.4.5 Vektorové řízení

Vektorové PI řízení je implementováno na základě popisu v [53, 38]. Uvažujeme reprezentaci stroje v $d-q$ souřadném systému. Vektorové řízení je zpětnovazební a je tedy potřeba znát odhady úhlu natočení $\hat{\vartheta}$ a otáček $\hat{\omega}$ rotoru stroje. Základní struktura regulátoru pak využije zpětné vazby z otáček, kdy první regulátor reguluje odchylku estimovaných otáček $\hat{\omega}$ od požadované referenční hodnoty $\bar{\omega}$ na nulu. Výstupem je pak referenční proud \bar{i}_q . Referenční proud \bar{i}_d volíme nulový, aby bylo dosaženo maximálního momentu. Tento postup bude ilustrován na diskretizované rovnici pro otáčky ze soustavy (1.22)

$$\omega_{t+1} = d\omega_t + ei_{q,t}$$

přičemž zanedbáváme poslední člen se závažným momentem. Požadované hodnoty bychom chtěli dosáhnout v následujícím kroku a tedy získáme rovnici

$$\bar{\omega} - d\omega = ei_q$$

\bar{i}_q pak můžeme získat pomocí PI regulátoru s vhodnými konstantami

$$\bar{i}_q = \text{PI}(\bar{\omega} - \omega, K_{p,i}, K_{i,i})$$

Referenční hodnoty proudů jsou následně porovnány s estimovanými hodnotami i_d a i_q a jejich odchylky jsou regulovány na nulu. Toto je provedeno pro každou složku zvlášť a výstupem jsou řídicí napětí v souřadnicích $d-q$, tedy u_d a u_q . Postupujeme obdobně s rovnicemi proudů ze soustavy (1.22)

$$\begin{aligned} i_{d,t+1} &= ai_{d,t} + \Delta t \cdot i_{q,t}\omega_t + cu_{d,t} \\ i_{q,t+1} &= ai_{q,t} - \Delta t \cdot i_{d,t}\omega_t - b\omega_t + cu_{q,t} \end{aligned}$$

kde prozatím zanedbáme členy s $\pm\Delta t \cdot i_{q,d}\omega$, dále pak člen $-b\omega_t$ a chceme dosáhnout požadovaných hodnot $\bar{i}_d = 0$ a \bar{i}_q , které byly získány v předchozím kroku. To vede na následující tvar

$$\begin{aligned} -ai_d &= cu_d \\ \bar{i}_q - ai_q &= cu_q \end{aligned}$$

Napětí u_d a u_q můžeme opět získat pomocí PI regulátorů ve tvaru

$$\begin{aligned} u_d &= \text{PI}(-i_d, K_{p,u}, K_{i,u}), \\ u_q &= \text{PI}(\bar{i}_q - i_q, K_{p,u}, K_{i,u}). \end{aligned}$$

Následně je ještě vhodné provést korekce v důsledku zanedbaných členů a to ve tvaru

$$\begin{aligned} u_d &= u_d - L_s \bar{i}_q \bar{\omega}, \\ u_q &= u_q + \psi_{pm} \bar{\omega}. \end{aligned}$$

Konkrétní implementace použitá v simulacích v kapitole **(odkaz)** vychází z [38].

2 Teorie řízení

Kapitola se zabývá teoretickým pohledem na problematiku řízení. Velká pozornost je zde věnována pojmu duální řízení. Tato koncepce zde bude jednak obecně popsána, ale budou uvedeny i konkrétní případy jak ji řešit. Důraz přitom bude kladen především na jednoduché suboptimální algoritmy, které jsou dostatečně jednoduché, aby byla, alespoň teoreticky, možná jejich aplikace v reálném čase.

Dále budou uvedeny aposteriorní Cramer-Raovy meze jako nástroj využitelnému k porovnání jednotlivých algoritmů, především z pohledu, jak dobře dokáží zlepšit pozorovatelnost systému. Tato kapitola však bude obsahovat i popis klasických technik pro řízení a odhadování, které jsou často užívány v této práci. Jedná se zejména o algoritmu rozšířeného Kalmanova filtru a lineární kvadratický regulátor.

2.1 Rozdělení řídicích algoritmů

Algoritmy užívané pro řízení systémů obecně, tedy nejen PMSM, lze rozdělit na základě jejich charakteristických vlastností do několika skupin. Toto rozdělení je obzvláště výhodné při práci se suboptimálními metodami. Rozčlenění je provedeno na základě dostupnosti pozorování (měření) stavu systému pro návrh řídicího zásahu a vychází z [1]:

Řídicí strategie založené na otevřené smyčce

V otevřené smyčce (open-loop) předpokládáme, že není dostupné žádné měření stavu systému. Řídicí zásah je tedy navrhován pouze na základě znalosti struktury systému a stanovených požadavků, například ve formě referenčního signálu. Vzhledem k tomu, že tento přístup pouze navrhuje řídicí zásahy a již nijak nevyhodnocuje jejich skutečný dopad, výsledky často nejsou dostačující pro náročnější aplikace. Příkladem užití s PMSM může být skalární volt/herz řízení, viz odstavec 1.4.2.

Zpětnovazební řídicí strategie

Oproti předchozí kategorii je zde zavedena zpětná vazba (feedback), která v každém časovém kroku t poskytuje měření y_t . Dostupná znalost o systému v čase t jsou tedy, kromě jeho struktury, všechna měření y_1, \dots, y_t až do času t . Dále však již nepředpokládáme žádnou znalost o budoucích měřeních. Tento přístup je také označován jako pasivně adaptivní, protože regulátor se „učí“ na základě měření, ale nijak tomuto učení aktivně nepomáhá. Tedy informace, které se o systému dozví, získává v jistém smyslu náhodou a tedy ne záměrně. Příklad tohoto přístupu představují klasické techniky pro řízení PMSM

jako vektorové řízení založené na PI nebo LQ regulátorech ve spojení s nějakým běžným estimátorem založeným na zpětné elektromotorické síle, například EKF.

Řídící strategie založená na uzavřené smyčce

Nejdříve je třeba poznamenat, že jak uvádějí autoři [1], není často v literatuře zdůrazňován a rozlišován rozdíl mezi strategií založené na uzavřené smyčce (closed-loop) a zpětnovazební strategií (feedback). Řídící strategie pracující v uzavřené smyčce uvažuje všechna budoucí pozorování a tedy využívá znalosti, že smyčka zůstane uzavřena až do konce uvažovaného časového horizontu. Tuto znalost se snaží zužitkovat, především v tom smyslu, že současný řídicí zásah může ovlivnit nejistotu týkající se budoucích stavů, to je také nazýváno jako *duální efekt*. V tomto případě může vhodný řídicí zásah „pomoci“ učení (odhadování) tím, že snižuje nejistotu budoucích stavů a přístup pak lze označit za aktivně adaptivní. Právě této problematice se detailněji věnují následující části zabývající se duálním řízením.

2.2 Teorie duálního řízení

Duální řízení je obvykle využíváno v systémech s neurčitostí, představovanou například neznámými parametry, nepozorovatelnými stavovými veličinami nebo samotnou strukturou systému. Snahou je tuto neurčitost snížit a poskytnout řízení srovnatelné kvality, jako v případě stejného systému bez neurčitosti. Charakteristickým rysem duálního řízení je, že obsahuje dvě hlavní části: „*opatrnou*“ a „*budící*“. *Opatrná* část, má za cíl pokud možno co nejlépe kontrolovat systém a snažit se dosáhnout optimální shody s požadavky. Oproti tomu *budící* část hledá optimální budící signál, který pomáhá co nejlépe určit neznámé veličiny systému. Tyto části jdou však proti sobě a cílem duálního řízení je nalézt mezi nimi vhodný kompromis.

Jak již bylo předznamenáno v předchozí části 2.1, většina klasických metod pro řízení a estimaci obecně spadá do kategorie zpětnovazebních strategií a tedy trpí nedostatky, které se snaží duální řízení odstranit.

Jedná se o oddělení řídicí a estimační části, které následně pracují nezávisle, i když obecně tyto dvě části nezávislé nejsou a navzájem se ovlivňují. Dalším nedostatkem je předpoklad, že odhad poskytnutý estimátorem se rovná skutečné hodnotě stavové veličiny. Tento přístup je označován jako *Certainty Equivalence* (CE). Oproti tomu duální řízení předpokládá stavové veličiny jako náhodné veličiny a uchovává si o nich statistickou informaci. Příkladem může být, že odhad z estimátoru uvažujeme ve tvaru střední hodnoty a variance dané veličiny a předpokládáme, že skutečná hodnota se nachází například v konfidenčním intervalu s těmito parametry. Z tohoto pohledu přístup CE předpokládá, že skutečná hodnota je rovna střední hodnotě.

Duální řízení tedy narozdíl od postupů založených na CE principu uvažuje kromě odhadu stavové veličiny i to, jak je tento odhad přesný a tomu také přizpůsobuje řídicí zákroky. Klasický regulátor se pak při řízení stochastického systému s neurčitostí obvykle chová „opatrně“, aby nezvyšoval dopad neurčitostí na celkovou ztrátu. Oproti tomu

regulátor využívající duálního efektu může být méně opatrný a přidat budící signál, aby snížil neurčitost v budoucnu a tím celkově vylepšil své výsledky [1].

Výše zmíněné důvody ukazují, proč by duální přístup mohl být obzvláště vhodný pro řízení PMSM. Je ale třeba mít na paměti, že duální řízení s sebou nese i některé nevýhody. Jedná se především o značnou výpočetní náročnost. Ta je problematická zejména, když zamýšlíme výpočet v reálném čase. Proto se v textu zaměříme hlavně na nejjednodušší algoritmy duálního řízení, které by tento požadavek mohly teoreticky naplnit.

2.2.1 Úloha duálního řízení

Nyní bude stručně popsána obecná úloha duálního řízení a postup jak nalézt její optimální řešení.

Formulace úlohy

Základní formulace problému duálního řízení pro časově diskrétní obecně nelineární systém dle [17] je:

$$\begin{aligned}x_{t+1} &= f_t(x_t, p_t, u_t, \xi_t), \quad t = 0, 1, \dots, T-1 \\p_{t+1} &= v_t(p_t, \varepsilon_t) \\y_t &= h_t(x_t, \eta_t)\end{aligned}$$

kde x_t je vektor stavu, p_t vektor neznámých parametrů, u_t vektor řídicích vstupů, y_t vektor výstupů systému, vektory ξ_t , ε_t a η_t představují nezávislý náhodný bílý šum s nulovou střední hodnotou a známým rozptylem, vše je uvažováno v čase t a f_t , v_t a h_t jsou známé vektorové funkce. Počáteční hodnoty x_0 a p_0 předpokládáme také známé. Množinu výstupů a vstupů systému dostupných v čase t označujeme jako *informační vektor* $I_t = \{y_t, \dots, y_0, u_{t-1}, \dots, u_0\}$, kde $t = 1, \dots, T-1$ a $I_0 = \{y_0\}$.

Dále uvažujeme, že požadavky na systém jsou zadány v podobě aditivní ztrátové funkce ve tvaru

$$J = \mathbf{E} \left\{ \sum_{t=0}^{T-1} g_{t+1}(x_{t+1}, u_t) \right\} \quad (2.1)$$

kde g_{t+1} jsou známe kladné konvexní skalární funkce. Očekávaná hodnota \mathbf{E} je počítána vzhledem k všem náhodným veličinám (x_0 , p_0 , ξ_t , ε_t a η_t , kde $t = 0, 1, \dots, T-1$).

Obecné řešení

Problémem optimálního adaptivního duálního řízení je nalezení takové řídicí strategie $u_t = u_t(I_t)$ ze známé množiny přípustných hodnot řízení U_t , která minimalizuje ztrátovou funkci J danou rovnicí (2.1).

Optimální řešení tohoto problému může být nalezeno rekurzivně užitím dynamického programování, kdy je v čase zpět prováděna následující minimalizace zapsaná pomocí

rovníc

$$\begin{aligned} J_{T-1}(I_{T-1}) &= \min_{u_{T-1} \in U_{T-1}} \mathbf{E} \{g_T(x_T, u_{T-1}) \mid I_{T-1}\} \\ J_t(I_t) &= \min_{u_t \in U_t} \mathbf{E} \{g_{t+1}(x_{t+1}, u_t) + J_{t+1}(I_{t+1}) \mid I_t\} \end{aligned}$$

pro $t = T - 2, T - 3, \dots, 0$.

Komplikace řešení úlohy

Výše popsaný postup představuje zdánlivě jednoduchý způsob, jak nalézt řešení úlohy duálního řízení. Skutečné provedení tohoto výpočtu však naráží na celou řadu praktických komplikací, které činí úlohu duálního řízení obecně neřešitelnou analyticky i numericky. Hlavními komplikacemi jsou jednak výpočet střední hodnoty a minimalizace, ale hlavně problémy spojené s funkcí J . Funkce J totiž závisí na informačním vektoru, který zahrnuje všechny předchozí interakce se systémem (pozorování a řízení) a proto závisí na obecně značně velkém počtu proměnných. Tuto funkci je navíc třeba uchovávat mezi jednotlivými časovými kroky v její plné reprezentaci jako funkce, ne pouze její hodnotu. **(možná citace)**

Optimální řešení úlohy duálního řízení je tedy známo jen v několika málo speciálních případech a jinak je třeba spoléhat na užití suboptimálních algoritmů.

2.3 Metody pro duální řízení

2.3.1 Přehled metod

Následující přehled představuje vybrané suboptimální algoritmy využitelné k řešení úlohy duálního řízení. Vybírány byly především nejjednodušší algoritmy, které by teoreticky umožnily implementaci v reálném čase pro řízení synchronních strojů.

Bikriteriální metoda

Bikriteriální metoda je založena na relativně jednoduchém principu. Ve snaze splnit obě hlavní vlastnosti duálního řízení (opatrnost a buzení) je ztrátová funkce rozdělena na dvě části, proto se také metoda nazývá bikriteriální. První ztrátová funkce odpovídá takzvanému *opatrnému řízení*, které navrhuje tím menší řídicí zásahy, čím je větší variance neznámých parametrů (proto opatrné). Nesnaží se však primárně tuto varianci nijak snížit. Druhá ztrátová funkce představuje kritérium pro optimální buzení. Tyto dvě ztrátové funkce je třeba současně minimalizovat. Jejich minimalizace ale jde obecně z podstaty problému proti sobě, navíc optimální budící zásah bývá zpravidla neomezeně velký. Proto je zvolen následující postup:

1. nejdříve je nalezeno optimální opatrné řízení
2. dále je vytyčena množina přípustných řešení kolem řízení nalezeného v bodě (1), například se může jednat o interval

3. druhá ztrátová funkce pro optimální buzení je minimalizována již pouze v rámci množiny přípustných řešení z bodu (2)

Konkrétní realizace hledání optimálního řídicího zásahu (minimalizace) pak již závisí na řešeném problému.

ρ -aproximace

Jako ρ -aproximace označujeme celý soubor suboptimálních přístupů k řešení úlohy duálního řízení, kdy se snažíme aproximovat pravděpodobnostní míru neznámých stavů a parametrů systému. Dále lze při užití této metody snadno nalézt odpovídající kategorii řídicího algoritmu, viz část 2.1. Dle [16, 15, 17] je problematika ρ -aproximací formulována následovně:

Hledání suboptimální řídicí strategie je založeno na minimalizaci modifikované ztrátové funkce

$$J_t(I_t, \rho_t) = \mathbf{E}_{\rho_t} \left\{ \sum_{i=t}^{T-1} g_{t+1}(x_{i+1}, u_i) \mid I_k \right\}$$

V čase t je řídicí strategie $u_t(I_t)$ nalezena pomocí aproximace podmíněné hustoty pravděpodobnosti stavů a parametrů systému pro budoucí časové kroky

$$\rho_t = p(x_{t+i}, p_{t+i} \mid I_{t+i})$$

pro $i = 0, 1, \dots, T - t - 1$, kde p značí hustotu pravděpodobnosti.

Pro různé volby ρ_t pak můžeme získat následující přístupy:

- *Řídicí strategie s otevřenou smyčkou* (open-loop, OL) uvažuje systém bez zpětné vazby a optimální řízení je hledáno z apriorní informace o stavech a parametrech systému. Tento zjednodušující předpoklad je ekvivalentní aproximaci

$$\rho_t = \{p(x_{t+i}, p_{t+i} \mid I_{t+i}) = p(x_{t+i}, p_{t+i} \mid I_0), i = 0, \dots, T - t - 1\}$$

- *Zpětnovazební řídicí strategie s otevřenou smyčkou* (open-loop feedback, OLF) také uvažuje systém bez zpětné vazby, ale jen pro budoucích časové kroky ($t+1$ až T), v současném časovém kroku t zpětnou vazbu uvažuje. Pozorování y_t jsou tedy použita k estimaci stavů i parametrů systému, ale pouze v současném časovém kroku t , v budoucích již ne. Opět lze formulovat pomocí ρ -aproximace jako

$$\rho_t = \{p(x_{t+i}, p_{t+i} \mid I_{t+i}) = p(x_{t+i}, p_{t+i} \mid I_t), i = 0, \dots, T - t - 1\}$$

- Pro srovnání zde bude uvedena i aproximace, která vede na již zmiňovaný přístup *Certainty Equivalence* (CE):

$$\begin{aligned} \rho_t &= \{p(x_{t+i}, p_{t+i} \mid I_{t+i}) \\ &= \delta(x_{t+i} - \hat{x}_{t+i}) \delta(p_{t+i} - \hat{p}_{t+i}), i = 0, \dots, T - t - 1\} \end{aligned}$$

kde δ značí Diracovu delta funkci a $\hat{x}_{t+i} = \mathbf{E}\{x_{k+i} \mid I_{t+i}\}$, $\hat{p}_{t+i} = \mathbf{E}\{p_{k+i} \mid I_t\}$.

- *Částečný CE přístup* (PCE) je založen na vhodné kombinaci předchozích postupů CE a OLF. Definujeme rozšířený stavový vektor jako $z_t^T = (x_t^T \ p_t^T)$, tedy jako vektor sdružující původní stav systému a jeho neznámé parametry. Tento vektor následně rozdělíme na dvě části s prázdným průnikem $z_{1,t}$ a $z_{2,t}$. Nyní aplikujeme na část z_1 zjednodušující předpoklad CE a na část z_2 předpoklad OLF. To odpovídá následující ρ -aproximaci

$$\begin{aligned} \rho_t &= \{p(z_{1,t+i}, z_{2,t+i} \mid I_{t+i}) \\ &= \delta(z_{1,t+i} - \hat{z}_{1,t+i}) p(z_{2,t+i} \mid I_t), i = 0, \dots, T - t - 1\} \end{aligned}$$

kde $p(z_{1,t+i}, z_{2,t+i} \mid I_{t+i}) = p(z_{t+i} \mid I_{t+i}) = p(x_{t+i}, p_{t+i} \mid I_{t+i})$. Samotné rozdělení vektoru z na dvě části je třeba vyřešit s ohledem na konkrétní strukturu systému, pro který je řízení navrhováno. Vhodnou volbou může být například označit jako z_1 stavové veličiny, které jsou přímo pozorovány. Autoři dále poukazují i na možnost kombinace s bikriteriálním přístupem.

Řešení LQG problému pomocí teorie her

Výpočetně relativně málo náročné řešení diskrétního LQG problému duálního řízení je představeno v [46]. Na řešení problému se užívá teorie her, kde hledáme optimální znáhodněnou strategii. Výsledkem pak je, že optimální řešení přeformulovaného problému duálního řízení je vážený průměr konečného počtu standartních LQG optimálních regulátorů. Jako váhové faktory jsou brány zobecněné věrohodnostní poměry.

Hyperstav

Algoritmus využívající hyperstav je předložen v [28] a z tohoto zdroje také převážně vychází následný popis a implementace v tomto textu. Hlavní rozdíl však je použití spojitého času v uvedeném zdroji, zatímco v tomto textu je využíván čas diskrétní. Základní myšlenka hyperstavu je poměrně jednoduchá:

Vyjdeme z klasicky definovaného stavu systému v čase t , označme jej jako x_t . Dále předpokládejme, že pro řešení úlohy nalezení vhodné řídicí strategie užíváme EKF jako estimátoru, stejný estimátor je užit i v [28]. Použití algoritmu EKF nám v každém čase poskytne odhad stavu \hat{x}_t , ale kromě tohoto odhadu poskytuje i odhad kovariance stavu reprezentovaný maticí P_t , detailněji viz odstavec 2.5.1. Nyní definujeme vektor *hyperstavu* v čase t jako původní stav x_t , ke kterému navíc přidáme prvky matice P_t . Z důvodu symetrie není třeba přidávat celou matici P_t , ale stačí jen její horní nebo dolní trojúhelník. Nyní na systém popsaný hyperstavem aplikujeme klasickým postupem algoritmus EKF a vhodné řízení, například LQ regulátor. Algoritmus EKF je tedy aplikován na systém dvakrát, poprvé formálně na původní stav a následně na hyperstav. Výhodou tohoto přístupu je, že kromě odhadu samotných stavových veličin, máme k dispozici i odhad jejich kovariancí a můžeme s nimi pracovat při návrhu řízení. Hlavními nevýhodami jsou růst velikost hyperstavu (obecně kvadraticky s velikostí původního stavu) a dále komplikace při výpočtu derivací rovnic pro výpočet EKF na stavu.

2.3.2 Injektáže jako duální řízení

Na injektáže lze z jistého směru pohlížet také jako na duální řízení. Především v sobě kombinují obě žádoucí vlastnosti, opatrnost a buzení. Opatrnost je reprezentována konkrétním použitým regulátorem, který se snaží co nejlépe sledovat cíl řízení. Injektovaný signál pak představuje buzení, které napomáhá k určení parametrů stroje.

V základním návrhu je přidáván vysokofrekvenční signál stále, bez ohledu na okolnosti a tedy tento návrh se příliš nesnaží o nalezení kompromisu mezi opatrným řízením a buzením. Velkou výhodou ale je, že to příliš nevadí, obzvláště při nízkých otáčkách, protože vysokofrekvenční signál má minimální vliv na samotný chod stroje. Současně ale poskytuje relativně dobrý odhad natočení rotoru, jehož kvalita nezávisí na otáčkách, ale pouze na anizotropiích stroje.

Jistý krok směrem k hledání kompromisu mezi opatrností a buzením lze pozorovat u hybridních metod, které buď plynule, nebo jednorázově přepínají mezi dvěma modely, s injektáží a bez ní. Jeden je určen pro dobrou estimaci a druhý pro nízké ztráty při řízení. To vede k velkému zlepšení, protože přídavný signál je injektován, jen, když je opravdu potřeba.

Hlavním problémem injektáží z hlediska duálního řízení je, že se jedná o přístup pouze pro jeden konkrétní případ, který byl navržen s využitím konkrétních vlastností PMSM a pro předem určený účel. Injektovaný vysokofrekvenční signál je užíván jednak z důvodu menšího vlivu na chod samotného stroje. Další důvod pro jeho užití je relativně snadné zpracování a vyhodnocení pomocí metod analýzy signálu, které lze snadno implementovat hardwarově (filtry, demodulace, fázový závěs). Problémem injektovaného signálu jsou pak jeho parametry, jako amplituda a frekvence, ty jsou zpravidla nalézány experimentálně.

Dalším zásadním problémem je, že injektáže fungují pouze na motory s anizotropiemi nějakého typu a jejich aplikace na SMPMSM je tedy značně omezena. Jedná se tedy sice o funkční metodu, kterou však lze aplikovat pouze na podskupinu všech dostupných strojů.

Je tedy na místě položit otázku, jestli takovýto přídavný signál může být optimálním buzením a nebo mu být alespoň v nějakém smyslu blízko. Odpovědět samozřejmě není snadné z důvodu praktické neřešitelnosti problému nalezení optimálního duálního řízení. Ve prospěch injektáží, a zejména hybridních metod, mluví výsledky praktických experimentů na skutečných motorech, proti nim pak zejména to, že byly navrhovány bez ohledu na optimalitu a hledání kompromisu mezi opatrností a buzením. Nicméně se jedná o dobrý základ, který je vhodný k bližšímu prostudování při návrhu méně náročných metod duálního řízení.

2.4 A posteriori Cramer-Raovy meze

Při vyhodnocování efektivity jednotlivých použitých algoritmů je výhodné mít k dispozici prostředek k jejich srovnání. K tomuto účelu lze použít a posteriori Cramer-Raových mezí (Posterior Cramer-Rao Bounds, PCRB). Interpretace PCRB je zjednodušeně taková, že představují „množství informace“, které je o dané veličině produkováno na výstupu systému [44]. Konkrétněji se jedná o dolní mez střední kvadratické chyby [49]. Tedy

reprezentuje minimální chybu, které se odhadovací algoritmus v uvažovaném případě dopustí. PCRB lze tedy využít ke srovnání jednotlivých uvažovaných duálních algoritmů v tom smyslu, že je možné vyhodnocovat, jak každý z nich dokáže zlepšit odhad stavových veličin a zvýšit pozorovatelnost v kritických režimech.

Následující popis PCRB včetně její specializace pro nelineární filtraci a dále pro Gaussovské hustoty je převzat z [49], kde je možné nalézt i detaily odvození zmiňovaných vztahů.

Definice

Nechť x představuje vektor měřených dat a θ je r -rozměrný odhadovaný náhodný parametr. Dále necht' $p_{x,\theta}(X, \Theta)$ je sdružená hustota pravděpodobnosti dvojice (x, θ) a $g(x)$ je funkce x , která je odhadem θ . Pak PCRB chyby odhadu má tvar

$$P = \mathbf{E} \left\{ [g(x) - \theta] [g(x) - \theta]^T \right\} \geq J^{-1}$$

kde J je Fischerova informační matice rozměru $r \times r$ s prvky

$$J_{ij} = \mathbf{E} \left[-\frac{\partial^2 \log p_{x,\theta}(X, \Theta)}{\partial \Theta_i \partial \Theta_j} \right]$$

pro $i, j = 1, \dots, r$.

Nelineární filtrace

Pro případ filtrace jsou parametry odhadovány postupně v průběhu času na základě rekurzivních vzorců. Sdruženou hustotu pravděpodobnosti lze rozepsat jako součin podmíněných hustot a vypočítat pro každý čas matici J_t , kde J_t^{-1} představuje spodní mez střední kvadratické chyby odhadu x_t .

Uvažujme nelineární filtrační problém se systémem

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= f_t(x_t, w_t) \\ z_t &= h_t(x_t, v_t) \end{aligned} \quad (2.2)$$

kde x_t je stav systému v čase t , z_t je pozorování v čase t , w a v jsou vzájemně nezávislé bílé procesy a f_t a h_t jsou obecně nelineární funkce. Pak je možné počítat rekurzivně posloupnost aposteriorních informačních matic J_t pro odhad stavu x_t jako

$$J_{t+1} = D_t^{22} - D_t^{21} (J_t + D_t^{11})^{-1} D_t^{12}$$

kde matice D_t jsou dány rovnostmi

$$\begin{aligned} D_t^{11} &= \mathbf{E} \left\{ -\Delta_{x_t}^{x_t} \log p(x_{t+1} | x_t) \right\} \\ D_t^{12} &= \mathbf{E} \left\{ -\Delta_{x_t}^{x_{t+1}} \log p(x_{t+1} | x_t) \right\} \\ D_t^{21} &= \mathbf{E} \left\{ -\Delta_{x_{t+1}}^{x_t} \log p(x_{t+1} | x_t) \right\} = (D_t^{12})^T \\ D_t^{22} &= \mathbf{E} \left\{ -\Delta_{x_{t+1}}^{x_{t+1}} \log p(x_{t+1} | x_t) \right\} + \mathbf{E} \left\{ -\Delta_{x_{t+1}}^{x_{t+1}} \log p(x_{t+1} | x_{t+1}) \right\} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Aditivní Gaussovský šum

Uvažujme speciální případ filtračního problému s aditivním šumem, kdy rovnice (2.2) má tvar

$$\begin{aligned}x_{t+1} &= f_t(x_t) + w_t \\ z_t &= h_t(x_t) + v_t\end{aligned}\tag{2.4}$$

a dále šumy w a v jsou Gaussovské s nulovou střední hodnotou a kovariančními maticemi Q_t a R_t v tomto pořadí. Pak lze rovnice (2.3) zjednodušit do tvaru

$$\begin{aligned}D_t^{11} &= \mathbf{E} \left\{ [\nabla_{x_t} f_t^T(x_t)] Q_t^{-1} [\nabla_{x_t} f_t^T(x_t)]^T \right\} \\ D_t^{12} &= -\mathbf{E} \left\{ \nabla_{x_t} f_t^T(x_t) \right\} Q_t^{-1} \\ D_t^{22} &= Q_t^{-1} + \mathbf{E} \left\{ [\nabla_{x_{t+1}} h_{t+1}^T(x_{t+1})] R_{t+1}^{-1} [\nabla_{x_{t+1}} h_{t+1}^T(x_{t+1})]^T \right\}\end{aligned}\tag{2.5}$$

Pro úplnost je vhodné uvést, že v případě lineárního systému, to jest lineárních funkcí f_t a h_t , odpovídá rekurzivní výpočet matice J_t , založený na výše uvedených maticích (2.5) pro D_t , výpočtu aposteriorní kovarianční matice Kalmanova filtru $P_t = J_t^{-1}$.

2.5 Lineárně kvadraticky Gaussovské řízení

Lineárně kvadraticky Gaussovské řízení (Linear-Quadratic-Gaussian, LQG) je jednou ze základních úloh teorie řízení. Jak již název této metody napovídá, uplatňuje se pro řízení lineárních systémů s kvadratickou ztrátovou funkcí a dále je uvažován aditivní bílý Gaussovský šum. V takovém případě pak platí separační princip a je možno zvlášť navrhnout optimálního pozorovatele a optimální regulátor při současném zachování optimality celého návrhu. Optimálním pozorovatelem pro tento případ je Kalmanův filtr a optimální řešení problému řízení je LQ regulátor. [2]

Vzhledem k zamýšlené aplikaci na nelineární točivý stroj však nelze LQG přístup přímo aplikovat, je však možno použít jeho zobecnění založené na linearizaci nelineárního systému. Pro nelineární systém ale obecně neplatí separační princip a zobecněné LQG nebude optimální a bude se jednat o CE přístup v důsledku oddělení estimační a řídicí části.

Zobecnění Kalmanova filtru představuje rozšířený Kalmanův filtr uvedený v následujícím odstavci, zobecnění LQ regulátoru pak bude provedeno v odstavci následujícím pomocí vhodné linearizace systému.

2.5.1 Rozšířený Kalmanův filtr

Zde bude uvedena základní formulace v textu často zmiňovaného rozšířeného Kalmanova filtru (Extended Kalman Filter, EKF). Typicky je algoritmus standartního Kalmanova filtru používán jako pozorovatel lineárního systému. Je však možno jej zobecnit i pro nelineární systémy a pak hovoříme o rozšířeném Kalmanově filtru. Zobecnění je založeno na jednoduché myšlence, kdy původní nelineární systém linearizujeme v každém časovém

kroku v okolí odhadu, střední hodnoty a kovariance. Popis standartního Kalmanova filtru je možno nalézt v [2]. Následující popis rozšířeného Kalmanova filtru je převzat z [43, 55]:

Modelový systém

Předpokládejme nelineární dynamický systém s aditivním šumem popsany rovnicemi

$$\begin{aligned}x_t &= f(x_{t-1}, u_{t-1}) + w_{t-1} \\y_t &= h(x_t) + v_t\end{aligned}$$

pro $t = 1, \dots, T$, kde x_t je vektor stavu, u_t vektor řízení, y_t vektor pozorování (měření) a vektory v_t a w_t představují na sobě vzájemně nezávislý Gaussovský bílý šum s nulovou střední hodnotou a kovariančními maticemi R_t a Q_t v tomto pořadí; obecně nelineární funkce f představuje funkci systému a h funkci měření a předpokládáme je známé.

Označme nyní A Jacobiho matici parciálních derivací f dle x v bodě odhadu, tedy $(A_t)_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\hat{x}_{t-1}, u_{t-1}, 0)$. Obdobně pro funkci h označme C matici derivací $(C_t)_{ij} = \frac{\partial h_i}{\partial x_j}(\hat{x}_t, 0)$, kde \hat{x}_t představuje aproximaci stavu vypočtenou z odhadu bez šumu $\tilde{x}_t = f(\hat{x}_t, u_{t-1}, 0)$.

Algoritmus

Samotný algoritmus EKF můžeme rozdělit na dvě fáze. V první označované jako časová oprava (time update) nebo také *predikce* se vypočítá apriorní odhad stavu a kovarianční matice:

$$\begin{aligned}\tilde{x}_t &= f(\hat{x}_{t-1}, u_{t-1}, 0) \\ \bar{P}_t &= A_t P_{t-1} A_t^T + Q_{t-1}\end{aligned}\tag{2.6}$$

Ve druhé části označované jako oprava měření (measurement update) neboli *korekce* pak získáme aposteriorní odhad stavu \hat{x}_t a kovarianční matice P_t :

$$\begin{aligned}K_t &= \bar{P}_t C_t^T (C_t \bar{P}_t C_t^T + R_t)^{-1} \\ \hat{x}_t &= \tilde{x}_t + K_t (y_t - h(\tilde{x}_t, 0)) \\ P_t &= (I - K_t C_t) \bar{P}_t\end{aligned}\tag{2.7}$$

Pro úplnost je ještě třeba dodat počáteční apriorní odhady \hat{x}_0 a P_0 .

2.5.2 Lineárně kvadratický regulátor

Lineárně kvadratický regulátor (Linear-Quadratic, LQ) je primárně navržen pro řízení lineárních systémů s kvadratickou ztrátovou funkcí. Dále je třeba zmínit, že existuje celá řada různých modifikací a vylepšení základního algoritmu, například pro nelineární systémy nebo lepší numerické vlastnosti. Základní formulace podle [2] je následovná:

Uvažujme lineární systém

$$x_{t+1} = A_t x_t + B_t u_t + w_t, \quad t = 0, 1, \dots, T-1\tag{2.8}$$

kde obecně vektorová veličina x_t reprezentuje stav systému v časovém kroku t , veličina u_t řízení v čase t a w_t je vzájemně nezávislý Gaussovský bílý šum s nulovou střední hodnotou a známou kovarianční maticí, dále je uvažován konečný diskrétní časový horizont T kroků.

Kvadratická ztrátová funkce je

$$\mathbf{E} \left\{ x_T^T Q_T x_T + \sum_{t=0}^{T-1} (x_t^T Q_t x_t + u_t^T R_t u_t) \right\} \quad (2.9)$$

kde \mathbf{E} značí očekávanou hodnotu, Q_t a R_t jsou penalizační matice stavu systému (splnění požadavků řízení), respektive penalizace vstupů. Na tyto matice jsou kladeny požadavky, že $Q_t \geq 0$ a $R_t > 0$. Při uvažování neúplné informace I_t o stavu je optimální řízení μ_t v každém časovém kroku rovno

$$\mu_t(I_t) = L_t \mathbf{E} \{x_t \mid I_t\}$$

kde matice L_t je dána rovností

$$L_t = - (R_t + B_t^T K_{t+1} B_t)^{-1} B_t^T K_{t+1} A_t \quad (2.10)$$

přičemž matice K_t získáme rekurzivně z Riccatiho rovnice

$$\begin{aligned} K_T &= Q_T \\ K_t &= A_t^T \left(K_{t+1} - K_{t+1} B_t (R_t + B_t^T K_{t+1} B_t)^{-1} B_t^T K_{t+1} \right) A_t + Q_t \end{aligned} \quad (2.11)$$

Lineárně kvadratický algoritmus s QR rozkladem

Předchozí výpočet pomocí Riccatiho rovnice (2.10) a (2.11) však není příliš vhodným z numerických důvodů [11]. Místo něj je pro praktické výpočty výhodnější použít například algoritmus lineárně kvadratického řízení založený na QR rozkladu [12]. Tento algoritmus má lepší numerické vlastnosti, umožňuje snadnější výpočet maticové inverze (inverze pouze trojúhelníkové matice) a lze pomocí něj implementovat i složitější kvadratickou ztrátovou funkci (nejen dva členy pro penalizaci stavu a vstupů).

Postup je založen na přepisu kvadratické ztráty do tvaru

$$x_{t+1}^T Q_t x_{t+1} + u_t^T R_t u_t = x_{t+1}^T \sqrt{Q_t}^T \sqrt{Q_t} x_{t+1} + u_t^T \sqrt{R_t}^T \sqrt{R_t} u_t$$

kde $\sqrt{\cdot}$ je vhodná maticová odmocnina. Vzhledem k požadavkům pozitivní (semi)definitnosti na matice Q_t a R_t má tato odmocnina smysl. V každém časovém kroku t pak minimalizujeme funkci

$$x_{t+1}^T \sqrt{Q_t}^T \sqrt{Q_t} x_{t+1} + u_t^T \sqrt{R_t}^T \sqrt{R_t} u_t + x_{t+1}^T \sqrt{S_t}^T \sqrt{S_t} x_{t+1}$$

kde S_t reprezentuje ztrátu v následujících časových krocích až do konce časového horizontu, jedná se o rekurzivní součet pozitivních ztrát a tedy maticová odmocnina má

opět smysl. Do tohoto kvadratického výrazu je možno dostadit model vývoje pro $x_{t+1} = A_t x_t + B_t u_t$ a následně jej zapsat maticově ve tvaru

$$\begin{pmatrix} u_t \\ x_t \end{pmatrix}^T \begin{bmatrix} \sqrt{Q_t} B_t & \sqrt{Q_t} A_t \\ \sqrt{R_t} & 0 \\ \sqrt{S_t} B_t & \sqrt{S_t} A_t \end{bmatrix}^T \underbrace{\begin{bmatrix} \sqrt{Q_t} B_t & \sqrt{Q_t} A_t \\ \sqrt{R_t} & 0 \\ \sqrt{S_t} B_t & \sqrt{S_t} A_t \end{bmatrix}}_Z \begin{pmatrix} u_t \\ x_t \end{pmatrix}$$

Na matici Z následně aplikujeme QR rozklad, to jest $Z = Q_Z R_Z$ a předchozí vztah upravíme na tvar

$$\begin{pmatrix} u_t \\ x_t \end{pmatrix}^T Z^T Z \begin{pmatrix} u_t \\ x_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_t \\ x_t \end{pmatrix}^T R_Z^T Q_Z^T Q_Z R_Z \begin{pmatrix} u_t \\ x_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_t \\ x_t \end{pmatrix}^T R_Z^T R_Z \begin{pmatrix} u_t \\ x_t \end{pmatrix}$$

a dále využijeme vlastnosti $Q_Z^T Q_Z = I$. Matice R_Z je v horním trojúhelníkovém tvaru, tedy blokově zapsáno

$$R_Z = \begin{bmatrix} R_{uu} & R_{ux} \\ 0 & R_{xx} \end{bmatrix}$$

Ztrátu nyní můžeme zapsat jako

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u_t \\ x_t \end{pmatrix}^T R_Z^T R_Z \begin{pmatrix} u_t \\ x_t \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} R_{uu} u_t + R_{ux} x_t \\ R_{xx} x_t \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} R_{uu} u_t + R_{ux} x_t \\ R_{xx} x_t \end{pmatrix} \\ &= (R_{uu} u_t + R_{ux} x_t)^T (R_{uu} u_t + R_{ux} x_t) + x_t^T R_{xx}^T R_{xx} x_t \end{aligned}$$

kteřou, vzhledem k její kvadratickosti a nezávislosti druhého členu na u_t , zřejmě minimalizujeme volbou u_t takovou, že $(R_{uu} u_t + R_{ux} x_t) = 0$ a tedy volíme

$$u_t = -R_{uu}^{-1} R_{ux} x_t$$

Matici $R_{xx}^T R_{xx}$ pak použijeme do předchozího časového kroku jako novou matici S .

3 Aplikace duálního řízení na PMSM

3.1 Zjednodušení a předpoklady

Zátěžný moment T_L předpokládáme nulový.

3.2 EKF pro PMSM

V této práci byl jako pozorovatel používán zejména rozšířený Kalmanův filtr. Budeme-li vycházet z popisu PMSM pomocí rovnic (1.17) pro stejné nebo (1.18) pro různé indukčnosti, nabízí se celá řada možností za jakých podmínek algoritmus EKF použít. Pro implementaci je však rozumných pouze několik málo možností.

Především nemá příliš smysl uvažovat EKF v rotorových souřadnicích $d-q$. Transformace ze statovorých souřadnic, ve kterých probíhá měření, do rotorových totiž závisí na úhlu natočení ϑ , viz rovnice (1.1). Hodnotu tohoto úhlu ale neznáme a navíc se jedná o hlavní veličinu, kterou chceme pomocí EKF určit. Dalším problémem je, že v rovnicích popisujících PMSM (v případě stejných i různých indukčností) v souřadné soustavě $d-q$ hodnota ϑ vůbec nevystupuje a tedy ji ani nelze rozumně určit. Jistou možností, kdy by mělo smysl uvažovat EKF v souřadné soustavě $d-q$, je případ, že bychom znali hodnotu ϑ nebo její odhad z jiného zdroje. Příkladem by mohla být znalost úhlu na základě aplikace vhodné injektážní techniky. Dále však budeme uvažovat EKF pouze ve statorových souřadnicích, konkrétně $\alpha-\beta$.

3.2.1 Šum

Algoritmus EKF předpokládá Gaussovský model šumu. Vzhledem k popisu neurčitostí v PMSM ([odkaz](#)) tento předpoklad splněn není. Lze však provést aproximaci hustoty pravděpodobnosti skutečného šumu Gaussovskou hustotou s vhodnými parametry. Tyto parametry lze buď nalézt na základě teoretické analýzy vlastností šumu, jako v [38] nebo je lze nalézt experimentálně. V této práci posloužily jako výchozí hodnoty stanovené ve zmiňovaném zdroji [38], které byly následně experimentálně doupřaveny.

3.2.2 Plný model

Prvním diskutovaným případem bude návrh označovaný jako *plný model* a budou uvažovány stejné indukčnosti v osách $d-q$. Všechny i_α , i_β , ω a ϑ popisující PMSM označíme jako stav x . Za pozorování y budeme považovat proudy i_α a i_β doplněné chybou měření.

Plný model je tedy popsán stavem a měřením

$$\begin{aligned}x_t &= (i_{\alpha,t}, i_{\beta,t}, \omega_t, \vartheta_t)^T \\y_t &= (y_{\alpha,t}, y_{\beta,t})^T\end{aligned}$$

jejichž vývoj v čase je dán rovnicemi modelového systému z části 2.5.1

$$\begin{aligned}x_{t+1} &= f(x_t, u_t) + w_t \\y_t &= h(x_t) + v_t\end{aligned}$$

kde funkce f odpovídá soustavě rovnic (1.20) a funkce h pouze vrací první dvě složky argumentu. Vektory w_t a v_t pak reprezentují vzájemně nezávislé bílé Gaussovské šумы s nulovou střední hodnotou a známými kovariančními maticemi Q_t a R_t v tomto pořadí.

Pro výpočet rekurzivního algoritmu EKF je třeba znát Jacobiho matice parciálních derivací A_t a C_t , kde $(A_t)_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\hat{x}_{t-1}, u_{t-1}, 0)$ a $(C_t)_{ij} = \frac{\partial h_i}{\partial x_j}(\hat{x}_t, 0)$. V tomto případě je výpočet poměrně jednoduchý a výsledné matice jsou

$$\begin{aligned}A_t &= \begin{bmatrix} a & 0 & b \sin \hat{\vartheta}_{t-1} & b\hat{\omega}_{t-1} \cos \hat{\vartheta}_{t-1} \\ 0 & a & -b \cos \hat{\vartheta}_{t-1} & b\hat{\omega}_{t-1} \sin \hat{\vartheta}_{t-1} \\ -e \sin \hat{\vartheta}_{t-1} & e \cos \hat{\vartheta}_{t-1} & d & -e \left(\hat{i}_{\beta,t-1} \sin \hat{\vartheta}_{t-1} + \hat{i}_{\alpha,t-1} \cos \hat{\vartheta}_{t-1} \right) \\ 0 & 0 & \Delta t & 1 \end{bmatrix} \\ C_t &= C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (3.1)$$

3.2.3 Redukovaný model

Redukovaný model se snaží usnadnit výpočet algoritmu EKF tím způsobem, že zmenšuje uvažovaný stav systému. Kritickým místem použití EKF je totiž časově náročná maticová inverze, viz část 2.5.1. Pro plný model má vektor stavu velikost 4 a tedy je invertována matice o rozměru 4×4 , oproti tomu redukovaný model užívá pouze stavu velikosti 2 a inverze matice 2×2 je znatelně rychlejší.

Hlavní myšlenkou je nezahrnovat proudy i_{α} a i_{β} do stavu a rovnou je definovat jako měření, tedy

$$\begin{aligned}x_t &= (\omega_t, \vartheta_t)^T \\y_t &= (i_{\alpha,t}, i_{\beta,t})^T\end{aligned}$$

Vyjdeme tedy ze stejných diskretních rovnic popisujících PMSM (3.1), ale nyní první dvě rovnice představují měření a druhé dvě vývoj systému. Matice pro EKF jsou pak ve tvaru

$$\begin{aligned}A_t &= \begin{bmatrix} d & -e \left(\hat{i}_{\beta,t-1} \sin \hat{\vartheta}_{t-1} + \hat{i}_{\alpha,t-1} \cos \hat{\vartheta}_{t-1} \right) \\ \Delta t & 1 \end{bmatrix} \\ C_t &= \begin{bmatrix} b \sin \hat{\vartheta}_{t-1} & b\hat{\omega}_{t-1} \cos \hat{\vartheta}_{t-1} \\ -b \cos \hat{\vartheta}_{t-1} & b\hat{\omega}_{t-1} \sin \hat{\vartheta}_{t-1} \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (3.2)$$

Dále je pak třeba ještě upravit hodnoty kovariančních matic pro šумы. Označme kovarianční matice plného stavu jako Q a R a předpokládejme, že Q je blokově diagonální s bloky o rozměru 2×2 , tedy

$$Q = \begin{bmatrix} Q_1 & \\ & Q_2 \end{bmatrix}$$

Ze vztahu pro součet dvou normálních náhodných veličin jsou pak kovarianční matice pro redukovaný model ve tvaru

$$\begin{aligned} Q_{red} &= Q_2 \\ R_{red} &= R + Q_1 \end{aligned}$$

3.2.4 Různé indukčnosti

V případě plného modelu pro různé indukčnosti L_d a L_q je postup zcela analogický, jen výchozí rovnice jsou jiné. V praxi jsou však rovnice relativně složité a proto nejsou uvedeny přímo zde v textu, lze je však nalézt v příloze.

3.3 Rovnice pro PCRB

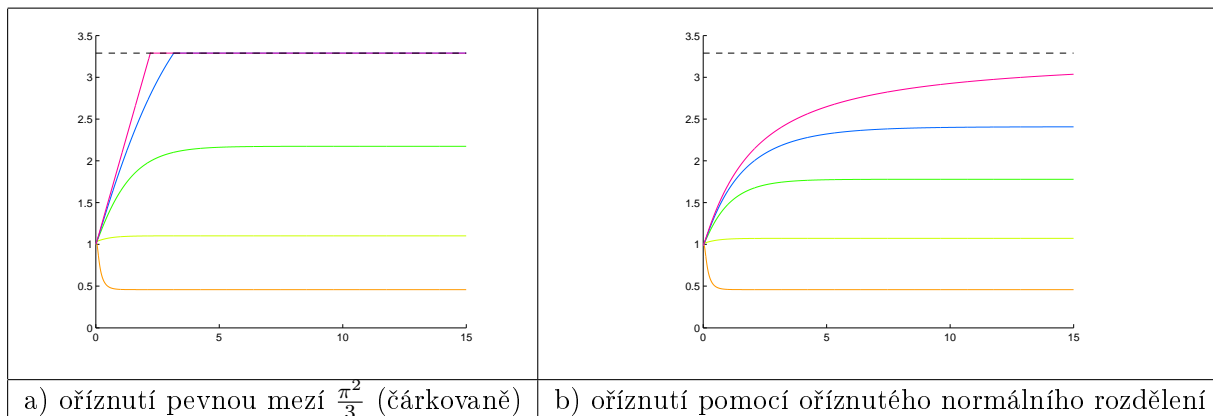
3.3.1 Užité modely

Obecně byly použity čtyři typy modelů v souřadném systému $\alpha\beta$. Souřadný systém dq totiž nemá smysl používat, jelikož mez stále roste, což lze jednoduše usuzovat na základě tvaru rovnic, ale tento fakt byl ověřen i experimentálně. Jednotlivé modely se liší tím, jestli je uvažován *plný* nebo *redukovaný* stav systému. Dále pak jestli byl uvažován model motoru se *stejnými* nebo *různými* indukčnostmi v osách d a q . Matice derivací $A_n = [\nabla_{x_n} f_n^T(x_n)]^T$ zobrazení f_n a matice $C_{n+1} = [\nabla_{x_{n+1}} h_{n+1}^T(x_{n+1})]^T$ zobrazení h_{n+1} dle jednotlivých stavových veličin jsou ekvivalentní maticím používaným pro EKF. Obdobné je to i s kovariančními maticemi Q a R .

3.3.2 Užité řízení

Použitá řízení shrnuje následující seznam, dále budou označována svým číslem položky:

1. $\omega = \bar{\omega}$, $\vartheta = \int \omega$, $i_\alpha = i_\beta = 0$
2. PI
3. PI + injeztáž sin do $d - q$
4. PI + injeztáž obdélníků do $d - q$
5. PI + injeztáž konstanty do d
6. PI + náhodná chyba na $\bar{\omega}$
7. PI + injeztáž sin do $\alpha - \beta$



Obrázek 3.1: Hodnoty PCRB polohy ϑ v závislosti na amplitudě injektovaného konstantního signálu (viz legenda).

8. PI + injektáž obdélníků do $\alpha - \beta$
9. PI + bikriteriální metoda se $\text{sign}\omega$
10. PI + bikriteriální metoda náhodný výběr 5 možností

3.3.3 Omezování hodnot meze

Vzhledem k tomu, že poloha ϑ je vyjádřena jako úhel (v radiánech), má smysl ji uvažovat pouze v intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$ (případně s vyloučením jedné z krajních hodnot). V modelu pro výpočet PCRB je však ϑ uvažována jako náhodná veličina s normálním rozdělením, které může nabývat hodnot z celé reálné osy a následně může PCRB nabývat velmi vysokých hodnot. Tyto hodnoty však pro interpretaci ve vztahu k PMSM nemají smysl, protože nejhorší případ (ve smyslu největší neznalosti parametru ϑ) nastává, když je hodnota ϑ rovnoměrně rozdělena v intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$, tedy o hodnotě úhlu natočení ϑ není žádná informace. Proto má smysl uvažovat hodnoty PCRB ϑ jen do velikosti variance rovnoměrného rozdělení na intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$, tato hodnota je $\frac{\pi^2}{3}$. Nad touto hranicí nemá smysl PCRB ϑ uvažovat a vyšší hodnoty je buď možno oříznout pevnou mezí nebo pomocí výpočtu oříznutého normálního rozdělení, který bude užít dále. Srovnání obou možností je zachyceno na grafech Obrázek 3.1.

Postup s oříznutím normálního rozdělení je samozřejmě velmi zjednodušený. Správný postup by vyžadoval odvodit vztahy pro skutečnou, tedy negaussovskou, hustotu úhlu natočení. To je však poměrně náročný úkol, především z důvodu, že skutečná hustota úhlu natočení není ani přesně známa a proto se dále v textu omezíme na přístup využívající ořez normální hustoty.

Oříznuté normální rozdělení Následující popis čerpá z [52]:

Oříznuté normální rozdělení pro skalární vhodnou veličinu x je definováno jako normální rozdělení $N(\mu, r)$ na omezeném supportu $a < x \leq b$. Momenty tohoto rozdělení

jsou:

$$\begin{aligned}\hat{x} &= \mu - \sqrt{r}\varphi(\mu, r) \\ \hat{x}^2 &= r + \mu\hat{x} - \sqrt{r}\kappa(\mu, r)\end{aligned}$$

kde

$$\begin{aligned}\varphi(\mu, r) &= \frac{\sqrt{2}(\exp(-\beta^2) - \exp(-\alpha^2))}{\sqrt{\pi}(\operatorname{erf}(\beta) - \operatorname{erf}(\alpha))} \\ \kappa(\mu, r) &= \frac{\sqrt{2}(b\exp(-\beta^2) - a\exp(-\alpha^2))}{\sqrt{\pi}(\operatorname{erf}(\beta) - \operatorname{erf}(\alpha))}\end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{a - \mu}{\sqrt{2r}} \\ \beta &= \frac{b - \mu}{\sqrt{2r}}\end{aligned}$$

Nyní pro speciální případ $a = -\pi$, $b = \pi$ a $\mu = 0$ je $\alpha = -\frac{\pi}{\sqrt{2r}} = -\beta$. Zřejmě tedy $\alpha^2 = \beta^2$ a čitatel φ je nulový, tedy $\varphi = 0$. Z tohoto pak hned vyplývá, že $\hat{x} = 0$ a $\operatorname{Var}(x) = \hat{x}^2 - \hat{x}^2 = \hat{x}^2$. κ má po dosazení tvar

$$\kappa = \frac{2\sqrt{2}\pi \exp\left(-\frac{\pi^2}{2r}\right)}{2\sqrt{\pi}\operatorname{erf}\left(\frac{\pi}{\sqrt{2r}}\right)}$$

Hodnota variance x je tedy

$$\operatorname{Var}(x) = r - \sqrt{2\pi r} \frac{\exp\left(-\frac{\pi^2}{2r}\right)}{\operatorname{erf}\left(\frac{\pi}{\sqrt{2r}}\right)}$$

3.4 Lineárně kvadratický regulátor

Tento algoritmus opět předpokládá lineární systém, viz rovnice (2.8), kterým PMSM není a je tedy nutné provést linearizaci. Nelze ale přímo použít matice odvozené v předchozí části 3.2. Zde je nutné vycházet z Taylorova rozvoje a zohlednit i případné konstantní členy. Obecně pro funkci $f(x)$ má rozvoj do prvního řádu v nějakém bodě x_0 tvar

$$f(x) \cong f(x_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0)(x - x_0)$$

kde parciální derivací f dle x je konkrétní matice A z předchozí části 3.2 o EKF vypočtená v bodě x_0 a tedy

$$f(x) \cong Ax + (f(x_0) - Ax_0) = Ax + \gamma$$

kde vektor γ představuje konstantní člen (nezávisí na x) a předchozí rovnice tedy není homogenní, jak bychom potřebovali jako výsledek linearizace pro rovnici (2.8). Proto tedy zvětšíme velikost matice A o 1 (o jeden sloupec a řádek) a stejně tak zvětšíme i velikost stav o 1 (přidáme konstantu) a předchozí rovnici získáme ve tvaru

$$\begin{pmatrix} f(x) \\ 1 \end{pmatrix} \cong \bar{A} \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$$

kde

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A & (f(x_0) - Ax_0) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

přičemž 0 zde označuje nulový řádkový vektor vhodné velikosti. Tímto postupem lze již získat požadovaný lineární popis systému (2.8), který současně zohledňuje i konstantní členy.

3.4.1 Matice pro LQ pro stejné indukčnosti

Pro případ plného stavu je matice A_t dána vztahem (3.1), kde jako hodnoty odhadu stavových veličin (složek vektoru \hat{x}_t) použijeme hodnoty bodu x_0 , ve kterém linearizujeme. Konstantní člen $\gamma = f(x_0) - A_t x_0$ tedy vypočteme jako

$$\gamma = \begin{pmatrix} -b\omega_0\vartheta_0 \cos \vartheta_0 \\ -b\omega_0\vartheta_0 \sin \vartheta_0 \\ e\vartheta_0 (i_{\beta,0} \sin \vartheta_0 + i_{\alpha,0} \cos \vartheta_0) \\ 0 \end{pmatrix}$$

kde dolní index 0 neznačí nulový čas, ale bod linearizace x_0 . Matice \bar{A}_t vypočtená v bodě x_0 (složky x_0 budou opět značeny dolním indexem 0) pak je

$$\begin{bmatrix} a & 0 & b \sin \vartheta_0 & b\omega_0 \cos \vartheta_0 & -b\omega_0\vartheta_0 \cos \vartheta_0 \\ 0 & a & -b \cos \vartheta_0 & b\omega_0 \sin \vartheta_0 & -b\omega_0\vartheta_0 \sin \vartheta_0 \\ -e \sin \vartheta_0 & e \cos \vartheta_0 & d & -e (i_{\beta,0} \sin \vartheta_0 + i_{\alpha,0} \cos \vartheta_0) & e\vartheta_0 (i_{\beta,0} \sin \vartheta_0 + i_{\alpha,0} \cos \vartheta_0) \\ 0 & 0 & \Delta t & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrici B_t derivací $f(x_t, u_t)$ dle vstupů u_t lze volit konstantní a časově nezávislou ve tvaru

$$B = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & c \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

protože funkce f je ve vstupech u lineární.

3.4.2 Ztrátová funkce

Protože chceme využít lineárně kvadratického algoritmu, je třeba formulovat ztrátovou funkci jako aditivní a kvadratickou, obecně ve tvaru daném rovnicí (2.9).

Hlavním požadavkem na systém je dosažení požadované hodnoty otáček $\bar{\omega}_t$ v čase t . Výše zmíněná ztráta (2.9) však vede na řízení pouze na nulovou hodnotu odpovídající $\bar{\omega} \equiv 0$, pro řízení na nenulové požadované otáčky je třeba modifikovat stav systému a zavést substituci

$$\psi_t = \omega_t - \bar{\omega}_t$$

a veličinu ψ pak již řídíme na nulovou hodnotu. Tuto substituci, která závisí na parametru $\bar{\omega}$, je třeba zanést do všech rovnic. Ve stavu systému veličina ψ_t nahradí veličinu ω_t . Dále je třeba zahrnout i všechny konstantní členy, které v důsledku substituce vzniknou.

Penalizační matici stavu systému v (2.9) budeme uvažovat nezávislou na čase $Q_t = Q$ pro všechna t a ve tvaru

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

kde q je pevně zvolená konstanta a matice Q má již rozměr 5×5 , protože byl stav rozšířen o konstantní člen v důsledku linearizace. Koncovou matici Q_T budeme uvažovat nulovou.

Dalším požadavkem je omezení na napětí – vstupy do systému, vyjádřené pomocí maximálního napětí U_{max} , které je schopen poskytnout napájecí zdroj. Toto omezení můžeme zasat jako

$$\|u_t\| \leq U_{max} \quad (3.4)$$

případně jako omezení na každou složku vektoru u_t zvlášť. Tuto podmínku lze také považovat za definici množiny přípustných řízení U_t v čase t , viz ([odkaz](#)). požadavek nelze přímo zapsat jako kvadratickou funkci a proto je třeba vhodně zvolit matici R_t v (2.9) aby dostatečně penalizovala příliš velké hodnoty řízení u_t a dále počítat s tím, že při přesažení hodnoty U_{max} dojde k ořezu. Výběr vhodných hodnot do matice R_t byl řešen experimentálně a bude mu věnována pozornost v části zabývající se experimenty ([odkaz](#)).

Substituované rovnice

V důsledku substituce $\psi_t = \omega_t - \bar{\omega}_t$ se rovnice (1.20) změni na

$$\begin{aligned} i_{\alpha,t+1} &= ai_{\alpha,t} + b(\psi_t + \bar{\omega}_t) \sin \vartheta_t + cu_{\alpha,t} \\ i_{\beta,t+1} &= ai_{\beta,t} - b(\psi_t + \bar{\omega}_t) \cos \vartheta_t + cu_{\beta,t} \\ \psi_{t+1} &= d\psi_t + e(i_{b,t} \cos \vartheta_t - i_{\alpha,t} \sin \vartheta_t) \\ \vartheta_{t+1} &= \vartheta_t + \Delta t (\psi_t + \bar{\omega}_t) \end{aligned} \quad (3.5)$$

předpokládáme-li, že pro požadované otáčky $\bar{\omega}$ platí $\bar{\omega}_{t+1} = d\bar{\omega}_t$.

Derivováním těchto rovnic dle nového stavu (substituovaného) $(i_{\alpha,t}, i_{\beta,t}, \psi_t, \vartheta_t)^T$ získáme matici

$$A_t = \begin{bmatrix} a & 0 & b \sin \vartheta_t & b(\psi_t + \bar{\omega}_t) \cos \vartheta_t \\ 0 & a & -b \cos \vartheta_t & b(\psi_t + \bar{\omega}_t) \sin \vartheta_t \\ -e \sin \vartheta_t & e \cos \vartheta_t & d & -e(i_{\beta,t} \sin \vartheta_t + i_{\alpha,t} \cos \vartheta_t) \\ 0 & 0 & \Delta t & 1 \end{bmatrix}$$

kteřá je hodnotově stejná s maticí A_t získanou v části 3.2 týkající se EKF na základě původního nesubstituovaného stavu (tj. s $x^{(3)} = \omega$).

Konstantní člen $\gamma = f(x_0) - A_t x_0$ je však již jiný a závisí na hodnotě $\bar{\omega}_t$, která do něj vstupuje jako časově proměnný parametr.

$$\gamma_{\bar{\omega}_t} = \begin{pmatrix} -b\omega_0 \vartheta_0 \cos \vartheta_0 + b\bar{\omega}_t \sin \vartheta_0 \\ -b\omega_0 \vartheta_0 \sin \vartheta_0 - b\bar{\omega}_t \cos \vartheta_0 \\ e\vartheta_0 (i_{\beta,0} \sin \vartheta_0 + i_{\alpha,0} \cos \vartheta_0) \\ \Delta t \bar{\omega}_t \end{pmatrix}$$

Výsledná matice \bar{A}_t je pak ve tvaru

$$\begin{bmatrix} a & 0 & b \sin \vartheta_0 & b\omega_0 \cos \vartheta_0 & -b\omega_0 \vartheta_0 \cos \vartheta_0 + b\bar{\omega}_t \sin \vartheta_0 \\ 0 & a & -b \cos \vartheta_0 & b\omega_0 \sin \vartheta_0 & -b\omega_0 \vartheta_0 \sin \vartheta_0 - b\bar{\omega}_t \cos \vartheta_0 \\ -e \sin \vartheta_0 & e \cos \vartheta_0 & d & -e(i_{\beta,0} \sin \vartheta_0 + i_{\alpha,0} \cos \vartheta_0) & e\vartheta_0 (i_{\beta,0} \sin \vartheta_0 + i_{\alpha,0} \cos \vartheta_0) \\ 0 & 0 & \Delta t & 1 & \Delta t \bar{\omega}_t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3.4.3 Matice LQ regulátoru pro různé indukčnosti

Matice \bar{A}_t v případě uvažování různých indukčností L_d a L_q má, obdobně jako matice pro EKF v tomto případě, relativně komplikovaný zápis. Z tohoto důvodu nebude opět uvedena zde v textu, ale je zařazena až do přílohy. Navíc je zde jiná i matice B_t , která je nyní závislá na čase. Tuto matici lze opět nalézt v příloze.

3.4.4 LQ řízení pro redukováný model

Pro redukováný systém samozřejmě platí vše uvedené v předchozím odstavci, řízení je ale komplikovanější, protože ve funkci popisující vývoj systému explicitně nevystupuje řízení u_t . Je tedy třeba vhodným způsobem tento problém vyřešit. Jednou z možností je zřetězení dvou LQ regulátory. V prvním kroku považovat za řízení proudy $i_{\alpha,\beta}$ a tedy tento první regulátor by na výstupu generoval požadované proudy $\bar{i}_{\alpha,\beta}$. Druhý regulátor by pak na základě rovnic pro vývoj proudů a referenčních hodnot proudů $\bar{i}_{\alpha,\beta}$ našel řízení $u_{\alpha,\beta}$.

Matice pro redukováný model

Protože ve funkci $f(x_t, y_t)$ v rovnicích (??) a (??) explicitně nevystupuje řízení u_t , je třeba zvolit trochu odlišný přístup, než pro plný model. Řízení budeme navrhovat ve dvou krocích. V prvním kroku budeme předpokládat, že vstupem jsou proudy $i_{\alpha\beta}$ a lineárně kvadratický algoritmus bude na svém výstupu produkovat požadované hodnoty těchto proudů $\bar{i}_{\alpha\beta}$. V dalším kroku druhý lineárně kvadratický algoritmus na základě požadovaných proudů $\bar{i}_{\alpha\beta}$ již navrhne hodnotu napětí $u_{\alpha\beta}$.

Dále provedeme ještě drobné zjednodušení a funkci $f(x_t, y_t)$ rozdělíme na dvě části

$$f(x_t, y_t) = \begin{pmatrix} d\omega_t \\ \vartheta_t + \Delta t\omega_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e(i_{b,t} \cos \vartheta_t - i_{\alpha,t} \sin \vartheta_t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Matici A_t pak položíme rovnou první maticí první, lineární, části systému

$$A = \begin{bmatrix} d & 0 \\ \Delta t & 1 \end{bmatrix}$$

a matici B_t pak získáme linearizací druhé části jako

$$B_t = \begin{bmatrix} -e \sin \vartheta_t & e \cos \vartheta_t \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tento postup neodpovídá přesně postupu odvození derivací užitému pro plný stav. Jeho výhodou však je, že již není třeba přidávat konstantní členy jako důsledek linearizace. Snadněji se také zahrne požadavek na nenulovou referenční hodnotu $\bar{\omega}$. Následně je užito lineárně kvadratického algoritmu s výše popsány maticemi.

Ve druhém kroku pak na základě referenčních hodnot proudů $\bar{i}_{\alpha\beta}$ nalezneme požadované řízení $u_{\alpha\beta}$. Využijeme k tomu rovnic pro funkci $h(x_t, y_t, u_t)$ viz (??)

$$h(x_t, y_t, u_t) = \begin{pmatrix} ai_{\alpha,t} + b\omega_t \sin \vartheta_t + cu_{\alpha,t} \\ ai_{\beta,t} - b\omega_t \cos \vartheta_t + cu_{\beta,t} \end{pmatrix}$$

které jsou v proudech $i_{\alpha\beta}$ i napětích $u_{\alpha\beta}$ lineární a lze opět použít lineárně kvadratický algoritmus. Členy $\pm b\omega_t \frac{\sin}{\cos} \vartheta_t$ zde pak vystupují jako konstanty a projeví se jako korekce vynásobená konstantou $\frac{1}{c}$ odečtená od výsledku.

3.4.5 Rozšíření pro penalizaci přírůstků napětí

Když chceme přidat ještě omezení na velikost změny vstupů $|u_{t+1} - u_t|$ což může v některých případech vylepšit chování LQG algoritmu, lze tak učinit přidáním dalšího členu do ztrátové funkce. Tento člen budeme volit opět kvadratický a to ve tvaru $(u_t - u_{t-1})^T S_t (u_t - u_{t-1})$. Penalizační matice S_t budem opět, jako matice R_t , nalezena experimentálně. Takovýto člen ale ve standartní ztrátové funkci LQ řízení nevystupuje a jeho přidání již není tak snadné. Při implementaci takto modifikovaného algoritmu bylo užito návrhu LQ řízení, založeného na maticovém QR rozkladu.

Rozdíl v souřadných soustavách

PMSM se ztrátovou funkcí penalizující přírůstky řízení ve tvaru

$$\sum_{t=0}^{T-1} \left((x_t - \bar{x}_t)^T Q (x_t - \bar{x}_t) + u_t^T R u_t + (u_t - u_{t-1})^T S (u_t - u_{t-1}) \right)$$

respektive se z ní vycházející ztrátovou funkcí pro návrh využívající hyperstav (tj. navíc penalizace P_ω). Uvažované řízení u_t jsou v osách $\alpha - \beta$ a penalizační matice jsou

$$R = \text{diag}(r, r)$$

$$S = \text{diag}(rd, rd)$$

V osách $d - q$ je ztrátová funkce je formálně shodná s tím rozdílem, že matice R a S závisejí na čase a vyjadřují penalizaci v osách $d - q$ a hodnota diagonálních prvků je různá. Tedy

$$R^{dq} = \text{diag}(r_d, r_q)$$

a následně pak

$$R_t^{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} \cos \vartheta_t & -\sin \vartheta_t \\ \sin \vartheta_t & \cos \vartheta_t \end{bmatrix} R^{dq} \begin{bmatrix} \cos \vartheta_t & \sin \vartheta_t \\ -\sin \vartheta_t & \cos \vartheta_t \end{bmatrix}$$

kde se jako úhel ϑ_t použije jeho odhad v čase t . Analogický vztah platí pro penalizaci přírůstků (matice S^{dq} a $S_t^{\alpha\beta}$).

3.4.6 LQ řízení v $d - q$

Postup je anlogický jako v případě pro $\alpha - \beta$ souřadnice. Vyjdeme ze soustavy rovnic (1.22)

$$\begin{aligned} i_{d,t+1} &= a i_{d,t} + \Delta t \cdot i_{q,t} \omega_t + c u_{d,t} \\ i_{q,t+1} &= a i_{q,t} - \Delta t \cdot i_{d,t} \omega_t - b \omega_t + c u_{q,t} \\ \omega_{t+1} &= d \omega_t + e i_{q,t} \\ \vartheta_{t+1} &= \vartheta_t + \omega_t \Delta t \end{aligned}$$

Tento tvar rovnic je z hlediska linearizece daleko příznivější, protože jedinými nelineárními členy jsou $\pm \Delta t \cdot i_{q,d} \omega$. Dále je třeba upozornit na důležitý detail. Na první pohled by se mohlo zdát, že jsme z rovnic kompletně odstranili závislost na úhlu natočení ϑ a nepotřebujeme jej tedy znát. To však není pravda, závislost tam stále je, i když skrytá. Měření výstupu i poskytování vstupu do systému probíhá v souřadné soustavě $\alpha - \beta$, když navrhujeme řízení v soustavě $d - q$ je samozřejmě třeba provést transformaci (1.1) a pak inverzní transformaci (1.2) zpět a obě závisí právě na úhlu natočení ϑ .

Ztrátovou funkci budeme uvažovat stejnou jako v předchozím případě pro $\alpha - \beta$ a stav rovnou rozšíříme o konstantu na $x_t = (i_{d,t}, i_{q,t}, \psi_t, \vartheta_t, 1)$. Vektor řízení je $u_t = (u_{d,t}, u_{q,t})$.

Upravená matice A_t se zahrnutím konstantních členů v důsledku linearizace a nenulových referenčních otáček a matice B jsou

$$A_t = \begin{bmatrix} a & \Delta t \cdot \omega & \Delta t \cdot i_q & 0 & -\Delta t \cdot i_q (\omega - \bar{\omega}) \\ -\Delta t \cdot \omega & a & -\Delta t \cdot i_d - b & 0 & \Delta t \cdot i_d (\omega - \bar{\omega}) - b\bar{\omega} \\ 0 & e & d & 0 & d\bar{\omega} \\ 0 & 0 & \Delta t & 1 & \Delta t\bar{\omega} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & c \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3.5 Hyperstav

3.5.1 Bellmanova funkce

Jak bylo již uvedeno v odstavci 2.3.1, využití hyperstavu umožňuje řídicímu algoritmu pracovat kromě odhadu stavu i s odhadem jeho kovariance. Proč se toto může jevit obzvláště výhodným ilustrují následující vztahy týkající se Bellmanovi funkce. Z tohoto důvodu je následující odstavec zařazen ještě před samotný popis hyperstavu.

Cílem řídicího algoritmu je minimalizovat ztrátovou funkci uvažovanou ve tvaru (2.9). Klasickým postupem pro nalezení optimálního řešení této úlohy je užití Bellmanovy funkce a algoritmu dynamického programování:

V koncovém čase T položíme

$$V_T(x_T) = 0 \quad (3.6)$$

a dále počítáme zpět v čase

$$V_{t-1}(x_{t-1}, u_{t-1}) = \min_{u_{t-1} \in U_{t-1}} E \{ x_t^T Q_t x_t + u_t^T R_t u_t + V_t(x_t, u_t) \mid \mathcal{I}_t \} \quad (3.7)$$

pro t od $T - 1$ do 1, kde střední hodnota je podmíněna \mathcal{I}_t , které reprezentuje současně dostupnou informaci o systému zahrnující všechna měření a řídicí vstupy do času t .

Uvažovanou kvadratickou ztrátu za jeden časový krok

$$x_t^T Q_t x_t + u_t^T R_t u_t$$

při konkrétní volbě matice Q ve tvaru (3.3) přejde na

$$q \left(x_t^{(3)} - \bar{\omega}_t \right) + u_t^T R_t u_t$$

kde horní index v závorce značí složku vektoru. Pak je možno rovnici (3.7) dále zjednodušit

$$\begin{aligned}
V_{t-1}(x_{t-1}, u_{t-1}) &= \min_{u_{t-1}} \mathbb{E} \{ x_t^T Q_t x_t + u_t^T R_t u_t + V_t(x_t, u_t) \mid \mathcal{I}_t \} \\
&= \min_{u_{t-1}} \left(\mathbb{E} \left\{ q \left(x_t^{(3)} - \bar{\omega}_t \right) \right\} + \mathbb{E} \left\{ u_t^T R_t u_t + V_t(x_t, u_t) \mid \mathcal{I}_t \right\} \right) \\
&= \min_{u_{t-1}} \left(q \mathbb{E} \left\{ \left(x_t^{(3)} \right)^2 + \bar{\omega}_t^2 + 2x_t^{(3)} \bar{\omega}_t \right\} + \mathbb{E} \left\{ u_t^T R_t u_t + V_t(x_t, u_t) \mid \mathcal{I}_t \right\} \right) \quad (3.8) \\
&= \min_{u_{t-1}} \left(q \left(\mathbb{E} \left\{ \left(x_t^{(3)} \right)^2 \right\} + \mathbb{E} \left\{ \bar{\omega}_t^2 \right\} + \mathbb{E} \left\{ 2x_t^{(3)} \bar{\omega}_t \right\} \right) + \mathbb{E} \left\{ u_t^T R_t u_t + V_t(x_t, u_t) \mid \mathcal{I}_t \right\} \right) \\
&= \min_{u_{t-1}} \left(q \left(\left(\hat{x}_t^{(3)} \right)^2 + \text{Var} \left(x_t^{(3)} \right) + \bar{\omega}_t^2 + 2\hat{x}_t^{(3)} \bar{\omega}_t \right) + \mathbb{E} \left\{ u_t^T R_t u_t + V_t(x_t, u_t) \mid \mathcal{I}_t \right\} \right) \\
&= \min_{u_{t-1}} \left(q \left(\hat{x}_t^{(3)} - \bar{\omega}_t \right) + q \text{Var} \left(x_t^{(3)} \right) + \mathbb{E} \left\{ u_t^T R_t u_t + V_t(x_t, u_t) \mid \mathcal{I}_t \right\} \right)
\end{aligned}$$

kde \hat{x} označuje střední hodnotu x a dále jsme využili toho, že $\bar{\omega}_t$ je daný parametr a tedy je pro výpočet střední hodnoty konstantou a vztahu $\text{Var}(x) = \mathbb{E}\{x^2\} - (\mathbb{E}\{x\})^2$. Tedy ve výpočtu Bellmanovy funkce V v rovnici (3.7) můžeme náhodnou veličinu x_t nahradit její střední hodnotou \hat{x}_t , když navíc zahrneme do rovnice varianci třetí složky x_t , tj. varianci otáčček stroje.

3.5.2 Hyperstav

Následující postup s hyperstavem vychází z [28]. V tomto článku je však narozdíl od následujícího postupu používán spojitý čas.

Jedná se o analogii s LQG v předchozí části, s tím rozdílem, že použijem EKF algoritmus v jistém smyslu jakoby dvakrát. Protože tímto přístupem již značně narůstá dimenzionalita úlohy je z výpočetních důvodů výhodnější užití redukováného modelu, i přes komplikace, které způsobuje při řízení.

Vyjdeme z redukováného stavu

$$x_t = (\omega_t, \vartheta_t)^T$$

a na něj formálně aplikujeme EKF. Tím získáme, kromě odhadu stavu x_t i odhad jeho variance v podobě matice

$$P = \begin{bmatrix} P_\omega & P_{\omega\vartheta} \\ P_{\omega\vartheta} & P_\vartheta \end{bmatrix}$$

a současně rovnice EKF (2.6) a (2.7) představují předpis pro výpočet P :

$$\begin{aligned}
\bar{P} &= A P A^T + V \\
S &= C \bar{P} C^T + W \\
K &= \bar{P} C^T S^{-1} \\
P^+ &= (I - K C) \bar{P}
\end{aligned} \quad (3.9)$$

kde jsou z důvodu jednoduššího zápisu vynechány časové indexy t a místo nic je užit horní index $+$ pro hodnotu v následujícím čase $t + 1$.

Nyní definujeme *hyperstav* ξ_t v čase t jako

$$\xi_t = (\omega_t, \vartheta_t, P_\omega, P_{\omega\vartheta}, P_\vartheta)^T$$

Na hyperstav již aplikujeme algoritmus pro LQG, jak byl popsán v předchozí části. Problém však představuje nalezení matice derivací A , protože je třeba derivovat maticové rovnice pro výpočet EKF (3.9) na stavu x . Jedním ze způsobů jak je to možné provést je derivovat každou z rovnic (3.9) dle jednotlivých složek vektoru hyperstavu ξ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{P}}{\partial \xi_i} &= \frac{\partial A}{\partial \xi_i} P A^T + A \frac{\partial P}{\partial \xi_i} A^T + A P \frac{\partial A^T}{\partial \xi_i} \\ \frac{\partial S}{\partial \xi_i} &= \frac{\partial C}{\partial \xi_i} \bar{P} C^T + C \frac{\partial \bar{P}}{\partial \xi_i} C^T + C \bar{P} \frac{\partial C^T}{\partial \xi_i} \\ \frac{\partial K}{\partial \xi_i} &= \frac{\partial \bar{P}}{\partial \xi_i} C^T S^{-1} + \bar{P} \frac{\partial C^T}{\partial \xi_i} S^{-1} - \bar{P} C^T S^{-1} \frac{\partial S}{\partial \xi_i} S^{-1} \\ \frac{\partial P^+}{\partial \xi_i} &= \frac{\partial \bar{P}}{\partial \xi_i} - \frac{\partial K}{\partial \xi_i} C \bar{P} - K \frac{\partial C}{\partial \xi_i} \bar{P} - K C \frac{\partial \bar{P}}{\partial \xi_i} \end{aligned} \quad (3.10)$$

kde $\frac{\partial}{\partial \xi_i}$ představuje zápis derivace dle i -té složky vektoru ξ a matice V a W uvažujeme jako konstanty v ξ . Matice linearizovaného vývoje hyperstavu A_{hyp} bude mít nyní blokový tvar

$$A_{hyp} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & 0 & 0 & 0 \\ \left(\frac{\partial P^+}{\partial \omega}\right)^{sl} & \left(\frac{\partial P^+}{\partial \vartheta}\right)^{sl} & \left(\frac{\partial P^+}{\partial P_\omega}\right)^{sl} & \left(\frac{\partial P^+}{\partial P_{\omega\vartheta}}\right)^{sl} & \left(\frac{\partial P^+}{\partial P_\vartheta}\right)^{sl} \end{bmatrix}$$

kde A_i představuje i -tý sloupec matice A , zápis 0 je sloupec nul vhodné délky a parciální derivace P^+ dle složky ξ_i v závorce s horním indexem sl $\left(\frac{\partial P^+}{\partial \xi_i}\right)^{sl}$ je myšlena v tom smyslu, že po vypočtení příslušné derivace $\frac{\partial P^+}{\partial \xi_i}$ z rovnice (3.10) jsou z této matice vybrány 3 z jejich 4 prvků tvořící horní nebo dolní trojúhelník a zapísány ve smyslu tvorby vektoru hyperstavu do sloupce:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P^+}{\partial \xi_i} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial P_\omega^+}{\partial \xi_i} & \frac{\partial P_{\omega\vartheta}^+}{\partial \xi_i} \\ \frac{\partial P_{\omega\vartheta}^+}{\partial \xi_i} & \frac{\partial P_\vartheta^+}{\partial \xi_i} \end{bmatrix} \\ \left(\frac{\partial P^+}{\partial \xi_i}\right)^{sl} &= \left(\frac{\partial P_\omega^+}{\partial \xi_i} \quad \frac{\partial P_{\omega\vartheta}^+}{\partial \xi_i} \quad \frac{\partial P_\vartheta^+}{\partial \xi_i} \right)^T \end{aligned}$$

Matici A_{hyp} vzniklou předchozím postupem již můžeme použít v algoritmu EKF pro hyperstav. Jako matici pozorování C_{hyp} použijeme původní matici C pouze doplněnou nulami na vhodný rozměr. Pro lineárně kvadratické řízení platí opět totéž, co pro jednoduché (tj. bez hyperstavu) a matici A_{hyp} je tedy třeba rozšířit zahrnutím konstantních členů, dále je třeba ošetřit substitucí řízení na nenulové požadované otáčky $\bar{\omega}$.

Protože uvažujeme redukováný model je třeba užit zřetězení dvou LQ regulátorů. Výhodou využití hyperstavu ale je, že máme k dispozici i odhady variancí P původního

stavu a tedy je možno zahrnout do kritéria například penalizaci P_ω , která vystupuje v Bellmanově funkci viz vzorec (3.8).

3.5.3 Plný model

Analogicky lze postupovat i pro plný model, všechny odpovídající matice však budou větší, protože velikost hyperstavu narůstá řádově kvadraticky.

Tedy pro stav

$$x_t = (i_{\alpha,t}, i_{\beta,t}, \omega_t, \vartheta_t)^T$$

vypočteme z rovnic pro EKF kovarianční matici

$$P = \begin{bmatrix} P_5 & P_6 & P_8 & P_{11} \\ P_6 & P_7 & P_9 & P_{12} \\ P_8 & P_9 & P_{10} & P_{13} \\ P_{11} & P_{12} & P_{13} & P_{14} \end{bmatrix}$$

a definujeme *hyperstav* ξ_t v čase t jako

$$\xi_t = (i_{\alpha,t}, i_{\beta,t}, \omega_t, \vartheta_t, P_5, P_6, P_7, P_8, P_9, P_{10}, P_{11}, P_{12}, P_{13}, P_{14})^T$$

Rovnice pro výpočet matice P , a tedy i jejích prvků P_i , jsou formálně shodné s rovnicemi pro redukovaný model, pouze rozměry vystupujících matic jsou větší. A matice A_{hyp} je ve tvaru

$$A_{hyp} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ \left(\frac{\partial P^+}{\partial \xi_i} \right)_{i \in \{1 \dots 14\}}^{sl} \end{bmatrix}$$

3.6 Bikriteriální metoda (nutno přepracovat a doplnit další verze)

3.6.1 Základní verze

Posledním z implementovaných algoritmů je následující *jednoduchý duální návrh*. Hlavní myšlenka je založena na *bikriteriální metodě*, viz ???. Její princip je ve stručnosti takový, že nejdříve je nalezeno opatrné řízení. Následně je v jeho okolí hledáno optimální buzení. Tohoto postupu se ale budeme držet jen částečně.

Nalezení *opatrného řízení*, které se pod tímto pojmem obvykle rozumí není v případě zde uvažovaného systému snadné. Proto místo něj využijeme opět LQ řízení v $d - q$ souřadnicích. Toto není z hlediska bikriteriální metody korektní, zde uvažovaný postup je ale myšlen jako jednoduchý duální návrh a je pouze jejím jistým přiblížením.

Nyní kolem takto nalezeného řízení, označme \tilde{u} , stanovíme okolí, ve kterém se budeme snažit minimalizovat ztrátu pro optimální buzení. Okolí uvažujeme jako dvourozměrný interval popsáný parametrem ε ve tvaru $\langle \tilde{u}_d - \varepsilon, \tilde{u}_d + \varepsilon \rangle \times \langle \tilde{u}_q - \varepsilon, \tilde{u}_q + \varepsilon \rangle$. Pro odhadování stavu je užít opět rozšířený Kalmanův filtr.

Jak již bylo uvedeno v kapitole ??, čím jsou vyšší otáčky, tím získáváme lepší odhad stavových veličin ω a ϑ , protože na otáčkách přímo úměrně závisí velikost zpětné elektromotorické síly. Na tomto základě můžeme uvažovat, že optimální buzení pro PMSM je takové, které se snaží maximalizovat otáčky ω , nebo přesněji jejich absolutní hodnotu.

Při maximalizaci otáček vyjdeme z rovnic (??)

$$\begin{aligned} i_{d,t+1} &= ai_{d,t} + \Delta t \cdot i_{q,t}\omega_t + cu_{d,t}, \\ i_{q,t+1} &= ai_{q,t} - \Delta t \cdot i_{d,t}\omega_t - b\omega_t + cu_{q,t}, \\ \omega_{t+1} &= d\omega_t + ei_{q,t}, \\ \vartheta_{t+1} &= \vartheta_t + \omega_t\Delta t, \end{aligned}$$

kde do třetí rovnice dosadíme z prvních dvou

$$\omega_{t+1} = d\omega_t + e(ai_{q,t-1} - \Delta t(ai_{d,t-2} + \Delta t \cdot i_{q,t-2}\omega_{t-2} + cu_{d,t-2})\omega_{t-1} - b\omega_{t-1} + cu_{q,t-1}). \quad (3.11)$$

Dosazovat by šlo samozřejmě dále, ale již teď je vidět, jak je vhodné volit u_d a u_q . Chceme maximalizovat $|\omega|$, budeme tedy volit řízení u na okraji intervalu kolem \tilde{u} . Je třeba rozlišit kladné a záporné otáčky, z rovnice (3.11) získáváme pro u_q volbu stejného znaménka jako pro ω a pro u_d znaménko opačné. Výsledné řízení je tedy

$$\begin{aligned} u_d &= \tilde{u}_d - \varepsilon \operatorname{sign} \omega, \\ u_q &= \tilde{u}_q + \varepsilon \operatorname{sign} \omega. \end{aligned}$$

Tento postup je relativně jednoduchou modifikací předchozího LQ algoritmu, ale jak ukazují simulace, může přinést značnou výhodu při určování počátečního natočení rotoru.

3.6.2 Další verze bikriteriální metody

- posun hodnot pro správné časy
- více současně běžících KF a výběr s nejmenší variancí na poloze nebo nejmenší determinant
- konstanta do d
- náhodně 5 možností

srovnání s pouze přidáním injektáží ($\alpha - \beta$, $d - q$, \sin , obdelník, různé frekvence), ale to asi pomocí PCR

vybrat vhodného reprezentanta do experimentů

3.7 Injektáž (nutno přepracovat)

V této části bude popsán jednoduchý návrh řízení využívajícího injektáží. Jedná se o velmi základní návrh.

Základní myšlenka je následující: Pomocí techniky injektáží se nepodařilo získat dostatečně kvalitní odhad úhlu natočení ϑ , aby byl použit přímo pro řízení. Je tedy užíváno současně i EKF, kdy odhad ϑ z injektáže slouží jako další zdroj informace pro EKF. Kompletní odhad stavu pro řízení pak poskytuje EKF. Jako řízení je využíváno LQ řízení v $d - q$ souřadné soustavě.

Celý proces pak probíhá tak, že k řízení navrženému LQ regulátorem je přidáván vysokofrekvenční signál do estimované d osy. Toto řízení je přivedeno na vstup PMSM a na jeho výstupu jsou měřeny proudy. Z proudu v estimované q ose je určen odhad ϑ pomocí násobení původním vysokofrekvenčním signálem a následnou aplikací low-pass filtru. Odhad ϑ je spolu s výstupy PMSM y_α a y_β dodán rozšířenému Kalmanovu filtru, který pak poskytuje odhad všech stavových veličin. Ty jsou použity pro návrh řízení v dalším kroku. Předpokládáme tedy měření ve tvaru $y_t = (i_{\alpha,t}, i_{\beta,t}, \vartheta)^T$.

Větší část zde používaných algoritmů (LQ, EKF) již byla popsána výše v textu, proto zde uvedeme pouze případné změny. Mění se matice C a R pro EKF:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$R = \begin{bmatrix} r & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & r_\vartheta \end{bmatrix}.$$

3.7.1 Zpracování signálu

Jak bylo uvedeno v části ??, je pro správnou funkci injektáží nutné splnit podmínku $L_d \neq L_q$. Z tohoto důvodu je třeba upravit i samotný simulátor a založit jej na rovnicích (??) a (??), které uvažují různé indukčnosti. Pro jednodušší zpracování byly zvoleny indukčnosti

$$L_d = 1.5L_s,$$

$$L_q = L_s.$$

Tato volba samozřejmě neodpovídá SMPMSM, kde je rozdíl indukčností v osách d a q velmi malý. Zde užití hodnoty jsou voleny pro usnadnění návrhu.

Vysokofrekvenční signál užitý pro injektáž byl zvolen jako kosinový signál o amplitudě $10V$ a frekvenci $500Hz$. Volba velikosti amplitudy je opět komplikovanou záležitostí. Obecně platí, že větší amplituda umožní snadnější zpracování signálu, především z důvodu většího odstupu signálu od šumu. Naopak ale větší amplituda způsobuje i větší rušení v samotném PMSM. Obvykle je v injektážních technikách užívána amplituda menší, zde zvolená hodnota je vyšší aby opět usnadnila zpracování. Dalším problémem může být, že zde předkládaný návrh amplitudu nijak neomezuje s rostoucími otáčkami, stále je tedy injektován signál o stejné amplitudě. To by se mohlo negativně projevit při vyšších otáčkách.

Asi největší komplikací tohoto přístupu, ale i injektáží obecně je vhodný návrh low-pass filtru. Používá se k získání amplitudově modulované informace o poloze rotoru. Návrh

filtrů je obecně netriviální záležitostí a může mít značný dopad na kvalitu výsledného odhadu ϑ . Zde používaný filtr je velmi jednoduchý a založený na klouzavých průměrech. Poskytované výsledky tedy nejsou příliš dobré.

Informace o poloze rotoru je amplitudově modulovaná na nosné vysoké frekvenci v q složce měřeného proudu. Není však modulována přímo hodnota ϑ ale veličina

$$\frac{V_{hf}}{\omega_{hf}} \frac{L_q - L_d}{2L_d L_q} \sin 2\theta,$$

kde V_{hf} představuje amplitudu a ω_{hf} úhlovou frekvenci vysokofrekvenčního signálu, θ je chyba odhadu $\theta = \vartheta_{sys} - \vartheta_{est}$. Po získání této informace je tedy třeba ještě provést vydělení příslušnou konstantou a ideálně ještě funkci arcsin. Výpočet arcsin je však náročný a nedává příliš dobré výsledky z důvodu omezení na jeho definiční obor, proto je výhodné využít aproximaci $\sin x \approx x$ pro malá x .

4 Experimenty

- vyhodnocení PCRb
- počáteční rozjezd – různé chyby počátečního odhadu
- extrémní otáčky – kam až to půjde
- nulové otáčky – profil konstantní 0
- nízké otáčky: +-1 trojúhelníky a lichoběžníky
- průchody 0: +-10 trojúhelníky a lichoběžníky
- vysoké otáčky: +-200 trojúhelníky a lichoběžníky

4.1 (PCRb)

4.2 Parametry LQ

4.2.1 Vliv R

Experiment 1

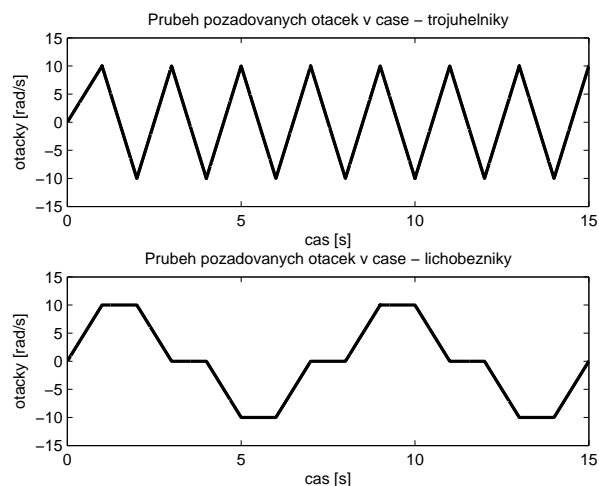
$T = 120000$, simulace: rovnice Ldq, $\vartheta_0 = 0$, profil: vysoké otáčky lichoběžník

zobrazeny průměrné chyby skutečných a požadovaných otáček na jeden časový krok

$R_d \backslash R_q$	1	0,1	0,01	0,001	0,0001	0,00001	0,000001
1	1,3611e4	2,7975e3	2,7132e1	7,7152e-2	1,8090e-1	2,0112e-1	2,1434e-1
0,1	1,3608e4	2,7821e3	2,6923e1	6,1079e-2	6,5245e-2	6,8255e-2	7,2499e-2
0,01	1,3609e4	2,7717e3	2,6895e1	8,3531e-2	3,6447e-2	3,0380e-2	3,6532e-2
0,001	1,3612e4	2,7679e3	2,6734e1	9,1544e-2	3,4273e-2	3,1728e-2	3,3633e-2
0,0001	1,3616e4	2,7716e3	2,6787e1	8,9357e-2	3,3911e-2	3,9216e-2	3,0616e-2
0,00001	1,3607e4	2,7694e3	2,6739e1	8,4837e-2	3,4840e-2	3,9240e-2	3,7651e-2
0,000001	1,3617e4	2,7706e3	2,6783e1	8,8681e-2	3,8210e-2	3,5346e-2	3,5747e-2

Experiment 2

$T = 120000$, simulace: simulátor nekompensovaný, $\vartheta_0 = 0$, profil: průchody lichoběžník



Obrázek 4.1: Příklad profilů požadovaných otáček na časovém horizontu 15s s amplitudou 10 rad/s: nahoře trojúhelníky a dole lichoběžníky

$R_d \backslash R_q$	1	0,1	0,01	0,001	0,0001	0,00001	0,000001
1	4,4444e1	3,6290e1	1,7948e1	1,8228e1	1,7269e1	1,7295e1	1,1418e0
0,1	4,4444e1	2,8901e1	1,3831e1	1,5845e0	1,8896e1	2,3333e0	6,7250e-2
0,01	4,4445e1	1,1411e1	1,8347e0	1,1814e0	5,3788e0	5,8928e0	5,4744e-3
0,001	4,4445e1	1,8263e1	1,9987e0	1,1792e0	1,2600e0	1,1246e0	5,7968e-3
0,0001	4,4444e1	1,8970e1	7,4575e0	6,7522e0	5,8384e0	5,7822e0	4,0131e0
0,00001	4,4444e1	1,1625e1	1,7669e0	1,1195e0	1,1844e0	1,0443e0	1,7002e-2
0,000001	4,4444e1	1,0788e1	1,9759e0	1,2122e0	1,7120e0	1,1676e0	1,7403e-2

4.2.2 Vliv penalizace přírůstků řízení

Experiment 1

$T = 120000$, simulace: rovnice Ldq, $\vartheta_0 = 0$

zobrazeny průměrné chyby z 1 běhu skutečných a požadovaných otáček na jeden časový krok

penalizace \ referenční profil	amplituda napětí	přírůstky napětí	amplituda i přírůstky napětí
nula	3,1151e-2	2,8342e-2	3,2326e-2
nízké otáčky trojúhelník	3,0335e-2	3,2884e-2	2,7312e-2
nízké otáčky lichoběžník	2,8457e-2	2,9418e-2	3,5183e-2
průchody nulou trojúhelník	3,0994e-2	2,5370e-2	2,5793e-2
průchody nulou lichoběžník	3,0375e-2	2,9170e-2	2,7315e-2
vysoké otáčky trojúhelník	4,2024e-2	4,3851e-2	5,5561e-2
vysoké otáčky lichoběžník	3,4487e-2	4,4423e-2	3,7093e-2

zobrazeny průměrné chyby z 10 běhů skutečných a požadovaných otáček na jeden

časový krok

penalizace\referenční profil	amplituda napětí	přírůstky napětí	amplituda i přírůstky napětí
nula	9,8346e-1	2,2253e0	2,8597e-2
vysoké otáčky lichoběžník	3,3322e-2	3,8263e-2	4,1418e-2

není tolik vypovídající, protože to jsou jen rovnice a hlavní je simulátor

Experiment 2

$T = 120000$, simulace: simulátor nekompensovaný, $\vartheta_0 = 0$

penalizace\referenční profil	amplituda napětí	přírůstky napětí	amplituda i přírůstky napětí
nula	0	0	0
nízké otáčky trojúhelník	3,5313e-3	4,0339e-3	3,6950e-3
nízké otáčky lichoběžník	4,6929e-3	4,4990e-3	4,6993e-3
průchody nulou trojúhelník	1,3453e-2	1,2503e-2	1,2949e-2
průchody nulou lichoběžník	7,0418e-3	5,0645e-3	7,0985e-3
vysoké otáčky trojúhelník	6,6670e2	7,2689e2	6,6534e2
vysoké otáčky lichoběžník	8,6202e1	8,5822e1	9,3141e1

velké chyby pro vysoké otáčky v důsledku chybějící kompenzace

4.2.3 Vliv souřadné soustavy

4.3 Simulace

4.4 (reálný experiment)

Literatura

- [1] Bar-Shalom, Y.; Tse, E.: Dual effect, certainty equivalence, and separation in stochastic control. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, ročník 19, č. 5, oct 1974: s. 494 – 500, ISSN 0018-9286, doi:10.1109/TAC.1974.1100635.
- [2] Bertsekas D. P.: *Dynamic Programming and Optimal Control*, ročník I. Belmont, Massachusetts: Athena Scientific, třetí vydání, 2005.
- [3] Bianchi, N.; Bolognani, S.; Jang, J.-H.; aj.: Comparison of PM Motor Structures and Sensorless Control Techniques for Zero-Speed Rotor Position Detection. *Power Electronics, IEEE Transactions on*, ročník 22, č. 6, 2007: s. 2466–2475, ISSN 0885-8993, doi:10.1109/TPEL.2007.904238.
- [4] Bianchi, N.; Bolognani, S.; Jang, J.-H.; aj.: Advantages of Inset PM Machines for Zero-Speed Sensorless Position Detection. *Industry Applications, IEEE Transactions on*, ročník 44, č. 4, 2008: s. 1190–1198, ISSN 0093-9994, doi:10.1109/TIA.2008.926203.
- [5] Bolognani, S.; Oboe, R.; Zigliotto, M.: Sensorless full-digital PMSM drive with EKF estimation of speed and rotor position. *Industrial Electronics, IEEE Transactions on*, ročník 46, č. 1, Únor 1999: s. 184–191, ISSN 0278-0046, doi:10.1109/41.744410.
- [6] Bolognani, S.; Tubiana, L.; Zigliotto, M.: EKF-based sensorless IPM synchronous motor drive for flux-weakening applications. *Industry Applications, IEEE Transactions on*, ročník 39, č. 3, 2003: s. 768–775, ISSN 0093-9994, doi:10.1109/TIA.2003.810666.
- [7] Bolognani, S.; Zigliotto, M.; Zordan, M.: Extended-range PMSM sensorless speed drive based on stochastic filtering. *Power Electronics, IEEE Transactions on*, ročník 16, č. 1, Leden 2001: s. 110–117, ISSN 0885-8993, doi:10.1109/63.903995.
- [8] Chen, J.-L.; Liu, T.-H.; Chen, C.-L.: Design and implementation of a novel high-performance sensorless control system for interior permanent magnet synchronous motors. *Electric Power Applications, IET*, ročník 4, č. 4, april 2010: s. 226 –240, ISSN 1751-8660.
- [9] Consoli, A.; Scarcella, G.; Testa, A.: Industry application of zero-speed sensorless control techniques for PM synchronous motors. *Industry Applications, IEEE Transactions on*, ročník 37, č. 2, 2001: s. 513–521, ISSN 0093-9994, doi:10.1109/28.913716.

- [10] Eskola, M.; Jussila, M.; Tuusa, H.: Indirect matrix converter fed PMSM-sensorless control using carrier injection. In *Power Electronics Specialists Conference, 2004. PESC 04. 2004 IEEE 35th Annual*, ročník 5, 2004, ISSN 0275-9306, s. 4010–4016 Vol.5, doi:10.1109/PESC.2004.1355185.
- [11] Favier, G.; Alengrin, G.; Orsini, M.: Square root and fast algorithms for solving the LQG control problem in discrete time systems. In *Decision and Control including the Symposium on Adaptive Processes, 1981 20th IEEE Conference on*, ročník 20, dec. 1981, s. 340–345, doi:10.1109/CDC.1981.269543.
- [12] Favoreel, W.; De Moor, B.; Van Overschee, P.; aj.: Model-free subspace-based LQG-design. In *American Control Conference, 1999. Proceedings of the 1999*, ročník 5, 1999, s. 3372–3376 vol.5, doi:10.1109/ACC.1999.782390.
- [13] Feynman, R.; Leighton, R.; Sands, M.: *Feynmanovy přednášky z fyziky s řešenými příklady 1/3*. Havlíčkův Brod: Fragment, první vydání, 2000, ISBN 80-7200-405-0.
- [14] Feynman, R.; Leighton, R.; Sands, M.: *Feynmanovy přednášky z fyziky s řešenými příklady 2/3*. Havlíčkův Brod: Fragment, první vydání, 2001, ISBN 80-7200-420-4.
- [15] Filatov, N.; Unbehauen, H.: Survey of adaptive dual control methods. *Control Theory and Applications, IEE Proceedings*, ročník 147, č. 1, Leden 2000: s. 118–128, ISSN 1350-2379, doi:10.1049/ip-cta:20000107.
- [16] Filatov, N.; Unbehauen, H.: Adaptive predictive control policy for nonlinear stochastic systems. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, ročník 40, č. 11, Listopad 1995: s. 1943–1949, ISSN 0018-9286, doi:10.1109/9.471221.
- [17] Filatov, N. M.; Unbehauen, H.: *Adaptive Dual Control, Theory and Applications*. Lecture Notes in Control and Information Sciences, Springer Berlin / Heidelberg, 2004.
- [18] Fišer, O.: *Střídavý regulovaný pohon se synchronním motorem s permanentními magnety*. Dizertační práce, VŠB - Technická univerzita Ostrava, dub 2006.
- [19] Foo, G.; Rahman, M.: Sensorless vector control of interior permanent magnet synchronous motor drives at very low speed without signal injection. *Electric Power Applications, IET*, ročník 4, č. 3, march 2010: s. 131–139, ISSN 1751-8660.
- [20] Genduso, F.; Miceli, R.; Rando, C.; aj.: Back EMF Sensorless-Control Algorithm for High-Dynamic Performance PMSM. *Industrial Electronics, IEEE Transactions on*, ročník 57, č. 6, june 2010: s. 2092–2100, ISSN 0278-0046.
- [21] Hammel, W.; Kennel, R.: Position sensorless control of PMSM by synchronous injection and demodulation of alternating carrier voltage. In *Sensorless Control for Electrical Drives (SLED), 2010 First Symposium on*, july 2010, s. 56–63, doi:10.1109/SLED.2010.5542801.

- [22] Harnefors, L.; Nee, H.-P.: A general algorithm for speed and position estimation of AC motors. *Industrial Electronics, IEEE Transactions on*, ročník 47, č. 1, Únor 2000: s. 77–83, ISSN 0278-0046, doi:10.1109/41.824128.
- [23] Holtz, J.: Sensorless Control of Induction Machines – With or Without Signal Injection? *Industrial Electronics, IEEE Transactions on*, ročník 53, č. 1, feb. 2005: s. 7 – 30, ISSN 0278-0046, doi:10.1109/TIE.2005.862324.
- [24] Jang, J.-H.; Sul, S.-K.; Ha, J.-I.; aj.: Sensorless drive of surface-mounted permanent-magnet motor by high-frequency signal injection based on magnetic saliency. *Industry Applications, IEEE Transactions on*, ročník 39, č. 4, 2003: s. 1031–1039, ISSN 0093-9994, doi:10.1109/TIA.2003.813734.
- [25] Kang, K.-L.; Kim, J.-M.; Hwang, K.-B.; aj.: Sensorless control of PMSM in high speed range with iterative sliding mode observer. In *Applied Power Electronics Conference and Exposition, 2004. APEC '04. Nineteenth Annual IEEE*, 2004.
- [26] Kim, H.; Lorenz, R.: Carrier signal injection based sensorless control methods for IPM synchronous machine drives. In *Industry Applications Conference, 2004. 39th IAS Annual Meeting. Conference Record of the 2004 IEEE*, ročník 2, 2004, ISSN 0197-2618, s. 977–984 vol.2, doi:10.1109/IAS.2004.1348532.
- [27] Kim, H.; Yi, S.; Kim, N.; aj.: Using low resolution position sensors in bumpless position/speed estimation methods for low cost PMSM drives. In *Industry Applications Conference, 2005. Fourtieth IAS Annual Meeting. Conference Record of the 2005*, ročník 4, 2005, ISSN 0197-2618, s. 2518–2525 Vol. 4, doi:10.1109/IAS.2005.1518814.
- [28] Kim, J.; Rock, S. M.: Stochastic Feedback Controller Design Considering the Dual Effect. In *Proceedings of the AIAA Guidance, Navigation and Control Conference*, Keystone, CO, August 2006.
- [29] Lee, J.; Hong, J.; Nam, K.; aj.: Sensorless Control of Surface-Mount Permanent-Magnet Synchronous Motors Based on a Nonlinear Observer. *Power Electronics, IEEE Transactions on*, ročník 25, č. 2, feb. 2010: s. 290 –297, ISSN 0885-8993.
- [30] Linke, M.; Kennel, R.; Holtz, J.: Sensorless position control of permanent magnet synchronous machines without limitation at zero speed. In *IECON 02 [Industrial Electronics Society, IEEE 2002 28th Annual Conference of the]*, ročník 1, 2002, s. 674–679 vol.1, doi:10.1109/IECON.2002.1187588.
- [31] Linke, M.; Kennel, R.; Holtz, J.: Sensorless speed and position control of synchronous machines using alternating carrier injection. In *Electric Machines and Drives Conference, 2003. IEMDC'03. IEEE International*, ročník 2, 2003, s. 1211–1217 vol.2, doi:10.1109/IEMDC.2003.1210394.
- [32] de M Fernandes, E.; Oliveira, A.; Jacobina, C.; aj.: Comparison of HF signal injection methods for sensorless control of PM synchronous motors. In *Applied Power*

Electronics Conference and Exposition (APEC), 2010 Twenty-Fifth Annual IEEE, feb. 2010, ISSN 1048-2334, s. 1984 –1989, doi:10.1109/APEC.2010.5433506.

- [33] Molavi, R.; Shojaee, K.; Khaburi, D.: Optimal vector control of permanent magnet synchronous motor. In *Power and Energy Conference, 2008. PECTON 2008. IEEE 2nd International*, dec. 2008, s. 249 –253, doi:10.1109/PECON.2008.4762479.
- [34] Morimoto, S.; Kawamoto, K.; Sanada, M.; aj.: Sensorless control strategy for salient-pole PMSM based on extended EMF in rotating reference frame. In *Industry Applications Conference, 2001. Thirty-Sixth IAS Annual Meeting. Conference Record of the 2001 IEEE*, ročník 4, 2001, s. 2637–2644 vol.4, doi:10.1109/IAS.2001.955991.
- [35] Novák, J.: Uplatnění synchronních strojů v dopravní technice. *Elektro*, čvn-zář 2006.
- [36] Pacas, M.: Sensorless Drives in Industrial Applications. *Industrial Electronics Magazine, IEEE*, ročník 5, č. 2, june 2011: s. 16 –23, ISSN 1932-4529.
- [37] Paturca, S. V.; Covrig, M.; Melcescu, L.: Direct Torque Control of Permanent Magnet Synchronous Motor (PMSM) - an approach by using Space Vector Modulation (SVM). In *Proceedings of the 6th WSEAS/IASME Int. Conf. on Electric Power Systems, High Voltages, Electric Machines*, 2006.
- [38] Peroutka, Z.; Smidl, V.; Vosmik, D.: Challenges and limits of extended Kalman Filter based sensorless control of permanent magnet synchronous machine drives. In *Power Electronics and Applications, 2009. EPE '09. 13th European Conference on*, sept. 2009, s. 1 –11.
- [39] Persson, J.; Markovic, M.; Perriard, Y.: A new standstill position detection technique for non-salient PMSM's using the magnetic anisotropy method (MAM). In *Industry Applications Conference, 2005. Fourtieth IAS Annual Meeting. Conference Record of the 2005*, ročník 1, 2005, ISSN 0197-2618, s. 238–244 Vol. 1, doi: 10.1109/IAS.2005.1518316.
- [40] Piippo, A.; Hinkkanen, M.; Luomi, J.: Sensorless control of PMSM drives using a combination of voltage model and HF signal injection. In *Industry Applications Conference, 2004. 39th IAS Annual Meeting. Conference Record of the 2004 IEEE*, ročník 2, 2004, ISSN 0197-2618, s. 964–970 vol.2, doi:10.1109/IAS.2004.1348530.
- [41] Piippo, A.; Hinkkanen, M.; Luomi, J.: Analysis of an Adaptive Observer for Sensorless Control of Interior Permanent Magnet Synchronous Motors. *Industrial Electronics, IEEE Transactions on*, ročník 55, č. 2, 2008: s. 570–576, ISSN 0278-0046, doi:10.1109/TIE.2007.911949.
- [42] Piippo, A.; Salomaki, J.; Luomi, J.: Signal Injection in Sensorless PMSM Drives Equipped With Inverter Output Filter. *Industry Applications, IEEE Transactions on*, ročník 44, č. 5, 2008: s. 1614–1620, ISSN 0093-9994, doi: 10.1109/TIA.2008.2002274.

- [43] Rebeiro, M. I.: Kalman and Extended Kalman Filters: Concept, Derivation and Properties. [cit. 2012-04-08] Dostupné z: <http://users.isr.ist.utl.pt>, 2004, Institute for Systems and Robotics, Lisboa Technical University.
- [44] Scharf, L. L.; McWhorter, L.: Geometry of the Cramer-Rao bound. *Signal Processing*, ročník 31, č. 3, 1993: s. 301 – 311, ISSN 0165-1684, doi:10.1016/0165-1684(93)90088-R.
- [45] Schmidt, P.; Gasperi, M.; Ray, G.; aj.: Initial rotor angle detection of a nonsalient pole permanent magnet synchronous machine. In *Industry Applications Conference, 1997. Thirty-Second IAS Annual Meeting, IAS '97., Conference Record of the 1997 IEEE*, ročník 1, Říjen 1997, s. 459–463 vol.1, doi:10.1109/IAS.1997.643063.
- [46] Sebald, A. V.: A computationally efficient optimal solution to the LQG discrete time dual control problem. In *Decision and Control including the 17th Symposium on Adaptive Processes, 1978 IEEE Conference on*, ročník 17, jan. 1978, s. 1160–1165, doi:10.1109/CDC.1978.268117.
- [47] Seok, J.-K.; Lee, J.-K.; Lee, D.-C.: Sensorless speed control of nonsalient permanent-magnet synchronous motor using rotor-position-tracking PI controller. *Industrial Electronics, IEEE Transactions on*, ročník 53, č. 2, 2006: s. 399–405, ISSN 0278-0046, doi:10.1109/TIE.2006.870728.
- [48] Silva, C.; Asher, G.; Sumner, M.: Hybrid rotor position observer for wide speed-range sensorless PM motor drives including zero speed. *Industrial Electronics, IEEE Transactions on*, ročník 53, č. 2, 2006: s. 373–378, ISSN 0278-0046, doi:10.1109/TIE.2006.870867.
- [49] Tichavsky, P.; Muravchik, C.; Nehorai, A.: Posterior Cramer-Rao bounds for discrete-time nonlinear filtering. *Signal Processing, IEEE Transactions on*, ročník 46, č. 5, may 1998: s. 1386 –1396, ISSN 1053-587X, doi:10.1109/78.668800.
- [50] Urlep, E.; Jezernik, K.: Low and Zero Speed Sensorless Control of nonsalient PMSM. In *Industrial Electronics, 2007. ISIE 2007. IEEE International Symposium on*, 2007, s. 2238–2243, doi:10.1109/ISIE.2007.4374956.
- [51] Černý, O.; Doleček, R.; Novák, J.: Synchronní motory s permanentními magnety pro trakční pohony kolejových vozidel. *Vědeckotechnický sborník ČD*, , č. 29, 2010.
- [52] Šmídl, V.; Quinn, A.: *The Variational Bayes Method in Signal Processing*. Signals and Communication Technology, Springer Berlin Heidelberg, 2006, ISBN 978-3-540-28820-6.
- [53] Štulrajter, M.; Hrabovcová, V.; Franko, M.: Permanent magnets synchronous motor control theory. *Journal of Electrical Engineering*, ročník 58, č. 2, 2007: s. 79–84.
- [54] Wallmark, O.; Harnefors, L.; Carlson, O.: Control Algorithms for a Fault-Tolerant PMSM Drive. *Industrial Electronics, IEEE Transactions on*, ročník 54, č. 4, 2007: s. 1973 –1980, ISSN 0278-0046, doi:10.1109/TIE.2007.895076.

- [55] Welch, G.; Bishop, G.: An introduction to the Kalman filter. [cit. 2012-04-08] Dostupné z: <http://www.cs.unc.edu>, 2006, UNC-Chapel Hill.
- [56] Yongdong, L.; Hao, Z.: Sensorless control of permanent magnet synchronous motor – a survey. In *Vehicle Power and Propulsion Conference, 2008. VPPC '08. IEEE*, sept. 2008, s. 1 –8.

Příloha

V příloze jsou zařazeny komplikovanější formální úpravy výrazů, které nejsou zařazeny v hlavní části textu především z důvodu jejich komplikovaného zápisu. Tyto výpočty byly prováděny především za pomoci symbolických výpočtů v programu Matlab (Symbolic Math Toolbox).

Rovnice v souřadné soustavě $\alpha - \beta$ pro různé indukčnosti

Diferenciální rovnice systému v souřadné soustavě $\alpha - \beta$ pro různé indukčnosti L_d a L_q jsou získány z rovnic (1.18), kdy je užito transformací (1.1) a (1.2):

$$\begin{aligned} \frac{di_\alpha}{dt} &= \cos \vartheta \left(\frac{u_d}{L_d} - \frac{R_s i_d}{L_d} - i_\beta \omega \cos \vartheta + i_\alpha \omega \sin \vartheta + \frac{L_q \omega i_q}{L_d} \right) \\ &\quad - \sin \vartheta \left(\frac{u_q}{L_q} - \frac{R_s i_q}{L_q} + i_\alpha \omega \cos \vartheta + i_\beta \omega \sin \vartheta - \frac{\omega \psi_{pm}}{L_q} - \frac{L_d \omega i_d}{L_q} \right) \\ \frac{di_\beta}{dt} &= \cos \vartheta \left(\frac{u_q}{L_q} - \frac{R_s i_q}{L_q} + i_\alpha \omega \cos \vartheta + i_\beta \omega \sin \vartheta - \frac{\omega \psi_{pm}}{L_q} + \frac{L_d \omega i_d}{L_q} \right) \\ &\quad + \sin \vartheta \left(\frac{u_d}{L_d} - \frac{R_s i_d}{L_d} - i_\beta \omega \cos \vartheta + i_\alpha \omega \sin \vartheta + \frac{L_q \omega i_q}{L_d} \right) \\ \frac{d\omega}{dt} &= \frac{k_p p_p^2 (\psi_{pm} i_q + (L_d - L_q) i_d i_q)}{J} - \frac{B\omega}{J} \end{aligned}$$

kde

$$\begin{aligned} i_d &= i_\alpha \cos \vartheta + i_\beta \sin \vartheta \\ i_q &= i_\beta \cos \vartheta - i_\alpha \sin \vartheta \\ u_d &= u_\alpha \cos \vartheta + u_\beta \sin \vartheta \\ u_q &= u_\beta \cos \vartheta - u_\alpha \sin \vartheta \end{aligned}$$

Následuje provedení diskretizace náhradou derivace konečnou diferencí

$$\frac{dx}{dt}(t) = \frac{x_{t+1} - x_t}{\Delta t}$$

a výpočet Jacobiho matice parciálních derivací stavových veličin $i_{\alpha,t+1}$, $i_{\beta,t+1}$, ω_{t+1} a ϑ_{t+1} dle veličin stejného stavu v předchozím čase $i_{\alpha,t}$, $i_{\beta,t}$, ω_t a ϑ_t :

Derivace $i_{\alpha,t+1}$

$$\begin{aligned}
\frac{di_{\alpha,t+1}}{di_{\alpha,t}} &= \frac{L_q - \Delta t R_s \sin^2 \vartheta}{L_q} - \frac{\Delta t L_q (L_q \omega \sin \vartheta \cos \vartheta + R_s \cos^2 \vartheta)}{L_d L_q} + \\
&+ \frac{\Delta t L_d \omega \sin \vartheta \cos \vartheta}{L_q} \\
\frac{di_{\alpha,t+1}}{di_{\beta,t}} &= \frac{\Delta t (L_d - L_q) (-L_q \omega \cos^2 \vartheta + R_s \sin \vartheta \cos \vartheta + L_d \omega \sin^2 \vartheta)}{L_d L_q} \\
\frac{di_{\alpha,t+1}}{di_{\omega_t}} &= \frac{\Delta t L_d (-L_d i_{\beta} \cos^2 \vartheta + L_d i_{\alpha} \sin \vartheta \cos \vartheta + L_d i_{\beta} - L_q i_{\beta} + \psi_{pm} \sin \vartheta)}{L_d L_q} + \\
&+ \frac{\Delta t L_q^2 (i_{\beta} \cos^2 \vartheta - i_{\alpha} \sin \vartheta \cos \vartheta)}{L_d L_q} \\
\frac{di_{\alpha,t+1}}{d\vartheta_t} &= \frac{\Delta t (\omega \psi_{pm} \cos \vartheta + R_s i_{\beta} \cos 2\vartheta - R_s i_{\alpha} \sin 2\vartheta)}{L_q} + \\
&+ \frac{\Delta t L_d (i_{\alpha} \omega \cos 2\vartheta + i_{\beta} \omega \sin 2\vartheta)}{L_q} - \\
&- \frac{\Delta t L_q (L_q i_{\alpha} \omega \cos 2\vartheta + L_q i_{\beta} \omega \sin 2\vartheta + R_s i_{\beta} \cos 2\vartheta - R_s i_{\alpha} \sin 2\vartheta)}{L_d L_q}
\end{aligned}$$

Derivace $i_{\beta,t+1}$

$$\begin{aligned}
\frac{di_{\beta,t+1}}{di_{\alpha,t}} &= \frac{\Delta t (L_d - L_q) (-L_d \omega \cos^2 \vartheta + R_s \sin \vartheta \cos \vartheta + L_q \omega \sin^2 \vartheta)}{L_d L_q} \\
\frac{di_{\beta,t+1}}{di_{\beta,t}} &= \frac{L_q - \Delta t R_s \cos^2 \vartheta}{L_q} - \frac{\Delta t L_q (-L_q \omega \sin \vartheta \cos \vartheta + R_s \sin^2 \vartheta)}{L_d L_q} - \\
&- \frac{\Delta t L_d \omega \sin \vartheta \cos \vartheta}{L_q} \\
\frac{di_{\beta,t+1}}{di_{\omega_t}} &= - \frac{\Delta t L_d (L_d i_{\alpha} \cos^2 \vartheta + L_d i_{\beta} \sin \vartheta \cos \vartheta - L_q i_{\alpha} + \psi_{pm} \cos \vartheta)}{L_d L_q} + \\
&- \frac{\Delta t L_q^2 (-i_{\alpha} \cos^2 \vartheta - i_{\beta} \sin \vartheta \cos \vartheta + i_{\alpha})}{L_d L_q} \\
\frac{di_{\beta,t+1}}{d\vartheta_t} &= \frac{\Delta t (\omega \psi_{pm} \sin \vartheta + R_s i_{\alpha} \cos 2\vartheta + R_s i_{\beta} \sin 2\vartheta)}{L_q} + \\
&+ \frac{\Delta t L_d (-i_{\beta} \omega \cos 2\vartheta + i_{\alpha} \omega \sin 2\vartheta)}{L_q} - \\
&- \frac{\Delta t L_q (-L_q i_{\beta} \omega \cos 2\vartheta + L_q i_{\alpha} \omega \sin 2\vartheta + R_s i_{\alpha} \cos 2\vartheta + R_s i_{\beta} \sin 2\vartheta)}{L_d L_q}
\end{aligned}$$

Derivace ω_{t+1}

$$\begin{aligned}\frac{d\omega_{t+1}}{di_{\alpha,t}} &= -\frac{\Delta tk_p p_p^2 (\psi_{pm} \sin \vartheta + (L_d - L_q) (-i_\beta \cos 2\vartheta + i_\alpha \sin 2\vartheta))}{J} \\ \frac{d\omega_{t+1}}{di_{\beta,t}} &= \frac{\Delta tk_p p_p^2 (\psi_{pm} \cos \vartheta + (L_d - L_q) (i_\alpha \cos 2\vartheta + i_\beta \sin 2\vartheta))}{J} \\ \frac{d\omega_{t+1}}{d\omega_t} &= 1 - \frac{B\Delta t}{J} \\ \frac{d\omega_{t+1}}{d\vartheta_t} &= -\frac{\Delta tk_p p_p^2}{J} (\psi_{pm} (i_\alpha \cos \vartheta + i_\beta \sin \vartheta) + \\ &+ (L_d - L_q) (i_\alpha^2 \cos 2\vartheta - i_\beta^2 \cos 2\vartheta + 2i_\alpha i_\beta \sin 2\vartheta))\end{aligned}$$

Derivace ϑ_{t+1}

$$\begin{aligned}\frac{d\vartheta_{t+1}}{di_{\alpha,t}} &= 0 \\ \frac{d\vartheta_{t+1}}{di_{\beta,t}} &= 0 \\ \frac{d\vartheta_{t+1}}{d\omega_t} &= \Delta t \\ \frac{d\vartheta_{t+1}}{d\vartheta_t} &= 1\end{aligned}$$

Matice pro EKF

Jednotlivé výše uvedené derivace lze již rovnou použít do matice A_t rozšířeného Kalmanova filtru, když za příslušné veličiny dosadíme jejich odhady v čase t . Matice A_t je pak ve tvaru

$$A_t = \begin{bmatrix} \frac{di_{\alpha,t+1}}{di_{\alpha,t}} & \frac{di_{\alpha,t+1}}{di_{\beta,t}} & \frac{di_{\alpha,t+1}}{d\omega_t} & \frac{di_{\alpha,t+1}}{d\vartheta_t} \\ \frac{di_{\beta,t+1}}{di_{\alpha,t}} & \frac{di_{\beta,t+1}}{di_{\beta,t}} & \frac{di_{\beta,t+1}}{d\omega_t} & \frac{di_{\beta,t+1}}{d\vartheta_t} \\ \frac{d\omega_{t+1}}{di_{\alpha,t}} & \frac{d\omega_{t+1}}{di_{\beta,t}} & \frac{d\omega_{t+1}}{d\omega_t} & \frac{d\omega_{t+1}}{d\vartheta_t} \\ \frac{d\vartheta_{t+1}}{di_{\alpha,t}} & \frac{d\vartheta_{t+1}}{di_{\beta,t}} & \frac{d\vartheta_{t+1}}{d\omega_t} & \frac{d\vartheta_{t+1}}{d\vartheta_t} \end{bmatrix}$$

Matice pro LQ regulátor

Pro použití matice A_t v LQ regulátoru je třeba provést její úpravu zahrnutím konstantních členů v důsledku linearizace a řízení na nenulové požadované otáčky, tedy substituce $\psi = \omega - \bar{\omega}$. Upravená matice je v blokovém tvaru

$$\bar{A}_t = \begin{bmatrix} A_t & \gamma \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

kde 0 představuje nulový řádek vhodné délky a γ je sloupcový vektor

$$\gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \\ \gamma_4 \end{pmatrix}$$

s hodnotami

$$\begin{aligned} \gamma_1 = & -\frac{\Delta t}{2L_d L_q} (2L_d^2 i_\beta \psi \sin^2 \vartheta + 2L_q^2 i_\beta \psi \cos^2 \vartheta + L_d^2 i_\alpha \psi \sin 2\vartheta - L_q^2 i_\alpha \psi \sin 2\vartheta - \\ & - 2L_d \psi_{pm} \bar{\omega} \sin \vartheta - 2L_d L_q i_\beta \psi + 2L_d R_s i_\beta \vartheta \cos 2\vartheta - 2L_q R_s i_\beta \vartheta \cos 2\vartheta - \\ & - 2L_d R_s i_\alpha \vartheta \sin 2\vartheta + 2L_q R_s i_\alpha \vartheta \sin 2\vartheta + 2L_d^2 i_\alpha \psi \vartheta \cos 2\vartheta - 2L_q^2 i_\alpha \psi \vartheta \cos 2\vartheta + \\ & + 2L_d^2 i_\alpha \bar{\omega} \vartheta \cos 2\vartheta - 2L_q^2 i_\alpha \bar{\omega} \vartheta \cos 2\vartheta + 2L_d^2 i_\beta \psi \vartheta \sin 2\vartheta - 2L_q^2 i_\beta \psi \vartheta \sin 2\vartheta + \\ & + 2L_d^2 i_\beta \bar{\omega} \vartheta \sin 2\vartheta - 2L_q^2 i_\beta \bar{\omega} \vartheta \sin 2\vartheta + 2L_d \psi_{pm} \psi \vartheta \cos \vartheta + 2L_d \psi_{pm} \bar{\omega} \vartheta \cos \vartheta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_2 = & \frac{\Delta t}{2L_d L_q} (2L_q^2 i_\alpha \psi \sin^2 \vartheta + 2L_d^2 i_\alpha \psi \cos^2 \vartheta + L_d^2 i_\beta \psi \sin 2\vartheta - L_q^2 i_\beta \psi \sin 2\vartheta - \\ & - 2L_d \psi_{pm} \bar{\omega} \cos \vartheta - 2L_d L_q i_\alpha \psi - 2L_d R_s i_\alpha \vartheta \cos 2\vartheta + 2L_q R_s i_\alpha \vartheta \cos 2\vartheta - \\ & - 2L_d R_s i_\beta \vartheta \sin 2\vartheta + 2L_q R_s i_\beta \vartheta \sin 2\vartheta + 2L_d^2 i_\beta \psi \vartheta \cos 2\vartheta - 2L_q^2 i_\beta \psi \vartheta \cos 2\vartheta + \\ & + 2L_d^2 i_\beta \bar{\omega} \vartheta \cos 2\vartheta - 2L_q^2 i_\beta \bar{\omega} \vartheta \cos 2\vartheta - 2L_d^2 i_\alpha \psi \vartheta \sin 2\vartheta + 2L_q^2 i_\alpha \psi \vartheta \sin 2\vartheta - \\ & - 2L_d^2 i_\alpha \bar{\omega} \vartheta \sin 2\vartheta + 2L_q^2 i_\alpha \bar{\omega} \vartheta \sin 2\vartheta - 2L_d \psi_{pm} \psi \vartheta \sin \vartheta - 2L_d \psi_{pm} \bar{\omega} \vartheta \sin \vartheta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_3 = & \frac{\Delta t}{2J} (L_d i_\alpha^2 k_p p_p^2 \sin 2\vartheta - 2B\bar{\omega} - L_d i_\beta^2 k_p p_p^2 \sin 2\vartheta - L_q i_\alpha^2 k_p p_p^2 \sin 2\vartheta + \\ & + L_q i_\beta^2 k_p p_p^2 \sin 2\vartheta + 2i_\alpha k_p p_p^2 \psi_{pm} \vartheta \cos \vartheta + 2i_\beta k_p p_p^2 \psi_{pm} \vartheta \sin \vartheta - \\ & - 2L_d i_\alpha i_\beta k_p p_p^2 \cos 2\vartheta + 2L_q i_\alpha i_\beta k_p p_p^2 \cos 2\vartheta + 2L_d i_\alpha^2 k_p p_p^2 \vartheta \cos 2\vartheta - \\ & - 2L_d i_\beta^2 k_p p_p^2 \vartheta \cos 2\vartheta - 2L_q i_\alpha^2 k_p p_p^2 \vartheta \cos 2\vartheta + 2L_q i_\beta^2 k_p p_p^2 \vartheta \cos 2\vartheta + \\ & + 4L_d i_\alpha i_\beta k_p p_p^2 \vartheta \sin 2\vartheta - 4L_q i_\alpha i_\beta k_p p_p^2 \vartheta \sin 2\vartheta) \end{aligned}$$

$$\gamma_4 = \Delta t \bar{\omega}$$

Dále je pro LQ regulátor nutno uvést matici B_t , ta je nyní závislá na čase a má zápis ve tvaru

$$B_t = \begin{bmatrix} \Delta t \left(\frac{\cos^2 \vartheta}{L_d} + \frac{\sin^2 \vartheta}{L_q} \right) & \frac{\Delta t}{2} \sin 2\vartheta \left(\frac{1}{L_d} - \frac{1}{L_q} \right) \\ \frac{\Delta t}{2} \sin 2\vartheta \left(\frac{1}{L_d} - \frac{1}{L_q} \right) & \Delta t \left(\frac{\cos^2 \vartheta}{L_q} + \frac{\sin^2 \vartheta}{L_d} \right) \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$