ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE

Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská

Katedra matematiky

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Duální bezsenzorové řízení synchronních elektrických pohonů

Dual sensorless control of synchronous machines

Posluchač:	Bc. Michal Vahala
Vedoucí práce:	Ing. Václav Šmídl, Ph.D.
Akademický rok:	2011/2012

zadání

Čestné prohlášení

Prohlašuji na tomto místě, že jsem předloženou práci vypracoval samostatně a že jsem uvedl veškerou použitou literaturu.

V Praze dne ....

Michal Vahala

Poděkování

aaa

. . . . . .

Michal Vahala

Název práce: **Duální bezsenzorové řízení synchronních elektrických pohonů**

Autor: Michal Vahala

Obor: Inženýrská informatika

Zaměření: Softwarové inženýrství a matematická informatika

Druh práce: Diplomová práce

Vedoucí práce: Ing. Václav Šmídl, Ph.D., ÚTIA AV ČR

Konzultant: —

Abstrakt:

Klíčová slova: PMSM, duální řízení, bikriteriální metoda, hyperstav, LQG

Title: **Dual sensorless control of synchronous machines**

Author: Michal Vahala

Abstract:

Key words: PMSM, dual control, bicriterial method, hyperstate, LQG

Obsah

Úvod **9**

1 Synchronní stroj s permanentními magnety **10**
1.1 PMSM . . . 10
1.1.1 Konstrukce . . . 10
1.1.2 Vlastnosti . . . 11
1.2 Matematický model PMSM . . . 12
1.2.1 Souřadné soustavy . . . 12
1.2.2 Transformace souřadnic . . . 13
1.2.3 Model PMSM . . . 14
1.2.4 Diskrétní model PMSM . . . 20
1.2.5 Stochastický model PMSM . . . 23
1.3 Bezsenzorový návrh PMSM . . . 25
1.3.1 Mechanické veličiny a senzory . . . 25
1.3.2 Přehled metod pro odhadování stavových veličin PMSM . . . 26
1.3.3 Metody založené na otevřené smyčce . . . 26
1.3.4 Metody s uzavřenou smyčkou . . . 27
1.3.5 Metody založené na neideálních vlastnostech motoru . . . 28
1.3.6 Detekce počáteční polohy . . . 29
1.3.7 Kombinace metod . . . 30
1.3.8 Přiblížení metody vysokofrekvenční injektáží . . . 31
1.4 Metody řízení . . . 34
1.4.1 Požadavky na řízení . . . 34
1.4.2 Skalární řízení . . . 35
1.4.3 Přímé řízení momentu . . . 35
1.4.4 Vektorové řízení . . . 35

2 Teorie řízení **38**
2.1 Rozdělení řídících algoritmů . . . 38
2.2 Teorie duálního řízení . . . 39
2.2.1 Úloha optimálního řízení . . . 39
2.2.2 Duální řízení . . . 40
2.2.3 Hyperstav . . . 41
2.3 Metody pro duální řízení . . . 42
2.3.1 Přehled metod . . . 42
2.3.2 Injektáže jako duální řízení . . . 44

2.4 Aposteriorní Cramer-Raovy meze . . . 45
2.5 Lineárně kvadraticky Gaussovské řízení . . . 47
2.5.1 Rozšířený Kalmanův filtr . . . 47
2.5.2 Lineárně kvadratický regulátor . . . 48

3 Aplikace duálního řízení na PMSM **51**
3.1 Úloha řízení PMSM . . . 51
3.2 Rozšířený Kalmanův filtr . . . 52
3.2.1 Šum . . . 52
3.2.2 Plný model . . . 52
3.2.3 Redukovaný model . . . 53
3.2.4 Různé indukčnosti . . . 54
3.3 Aposteriorní Cramer-Raovy meze . . . 54
3.3.1 Užité modely . . . 54
3.3.2 Omezování hodnot meze . . . 54
3.4 Lineárně kvadratický regulátor . . . 56
3.4.1 Ztrátová funkce . . . 56
3.4.2 LQ regulátor v $\alpha - \beta$ . . . 59
3.4.3 Redukovaný LQ regulátor v $\alpha - \beta$ . . . 60
3.4.4 LQ regulátor v $d - q$ . . . 61
3.5 Hyperstav . . . 62
3.5.1 Bellmanova funkce pro PMSM . . . 63
3.5.2 Redukovaný model . . . 63
3.5.3 Plný model . . . 65
3.6 Bikriteriální metoda . . . 66
3.6.1 Základní verze . . . 66
3.6.2 Časový posun hodnot . . . 67
3.6.3 Výběr buzení na základě výpočtu více EKF . . . 68
3.6.4 Konstantní signál v ose d . . . 68
3.7 Vysokofrekvenční injektáž . . . 69

4 Experimenty **71**
4.1 Návrh simulací bezsenzorového řízení . . . 71
4.1.1 Parametry stroje . . . 71
4.1.2 Kompenzace úbytků napětí . . . 72
4.1.3 Srovnávací kritéria . . . 72
4.2 Výběr parametrů a zástupců jednotlivých metod . . . 73
4.2.1 Neduální LQ regulátor . . . 74
4.2.2 Bikriteriální duální řízení . . . 80
4.2.3 LQ regulátor s hyperstavem . . . 82
4.3 Aposteriorní Cramer-Raovy meze . . . 83
4.3.1 Vzorový běh systému . . . 84
4.3.2 Porovnání algoritmů . . . 84

4.4 Simulační porovnání algoritmů 89
4.4.1 Rozjezd stroje 89
4.4.2 Odhad v nule 90
4.4.3 Nízké otáčky 92
4.4.4 Průchody nulou 94
4.4.5 Vysoké otáčky 96
4.5 Diskuze výsledků 98
4.5.1 Referenční vektorové PI řízení (PI) 98
4.5.2 Neduální LQ regulátor (LQ-CE) 98
4.5.3 Využití vysokofrekvenční injektáže (INJ) 100
4.5.4 Bikriteriální duální řízení (BK) 101
4.5.5 LQ regulátor s hyperstavem (LQ-HS) 101
4.5.6 Náměty pro další zkoumání 102

Závěr **103**

Příloha – LQG pro různé indukčnosti **i**

Úvod

Synchronní motory, a to především ty osazené permanentními magnety, jsou v poslední době stále více oblíbené pro řadu praktických aplikací. Hlavním nedostatkem pro jejich využití ale je, že za účelem jejich dobrého řízení je nutná znalost polohy hřídele. Tento problém byl zatím řešen převážně instalací mechanických senzorů, které však zvyšují rozměry, poruchovost, ale především cenu celého zařízení. Je tedy přirozené, že se objevily snahy o nalezení efektivního způsobu řízení bez potřeby těchto čidel.

V současné době již existuje pro bezsenzorové řízení synchronních strojů celá řada postupů a dokonce i pokusy o implementaci bezsenzorového řízení v praxi [26, 39, 61]. Hlavním problémem všech dostupných metod však je, že se povětšinou jedná o experimentálně nalezené postupy vyvinuté pro konkrétní účel bez hlubšího teoretického kontextu. Dobré teoretické pozadí pro bezsenzorové řízení by však mohl poskytnout právě koncept duálního řízení, které se snaží nalézt kompromis mezi co nejpřesnějším řízením a současně dobrým odhadováním neměřených veličin. Teorie ohledně duálního řízení je již značně rozvinuta a hojně popsána v literatuře, například [4, 19]. Avšak naprostá většina postupů využívajících duálního řízení je extrémně výpočetně náročná, což není příliš vhodné pro aplikaci na řízení motoru, které je třeba provádět v reálném čase.

Tato práce si tedy klade za cíl prostudovat jednoduché suboptimální algoritmy pro výpočet duálního řízení a pokusit se jejich vybrané zástupce aplikovat na bezsenzorové řízení synchronního motoru. Dále pak klasifikovat běžně používané přístupy k řízení těchto strojů z pohledu konceptu duálního řízení a ukázat případné výhody užití duality.

V textu bude nejdříve obecně popsán synchronní motor s permanentními magnety, jeho matematický model a běžně užívané techniky pro řízení a odhadování neměřených veličin. Následovat bude kapitola týkající se teorie duálního řízení a výběr jednoduchých suboptimálních metod pro řešení tohoto problému. Další kapitola pak bude věnována spojení předchozích dvou, tedy aplikaci duálního řízení na synchronní stroj. Na závěr pak budou zařazeny experimenty, především teoretická analýza jednotlivých užitých algoritmů a výsledky simulací. Nedílnou součástí bude i shrnutí dosažených výsledků.

1 Synchronní stroj s permanentními magnety

Jak napovídá název práce, je text zaměřen na řízení synchronních elektrických pohonů. Ze skupiny všech těchto strojů se však zaměřuje pouze na jejich specifickou podskupinu obsahující permanentní magnety. Je tomu tak proto, že oproti synchronním strojům s elektrickým buzením vykazují synchronní stroje s permanentními magnety celou řadu výhod, těší se stále větší oblibě a nacházejí mnoho aplikací v praxi [39].

1.1 PMSM

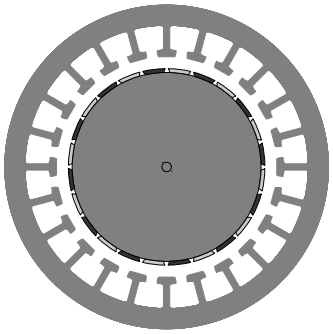
Zkratkou PMSM bude v textu označován synchronní stroj s permanentními magnety (Permanent Magnet Synchronous Machine). U tohoto točivého elektrického stroje (motoru) se rotor otáčí stejnou rychlostí, tedy synchronně, jako točivé magnetické pole statoru. Pro generování magnetického pole rotoru je užito místo budícího vinutí permanentních magnetů. Rostoucí praktická aplikace této konstrukce je umožněna především díky snadnější dostupnosti kvalitních permanentních magnetů ze speciálních slitin s velkou magnetickou indukcí oproti klasickým feritovým magnetům [38, 55].

1.1.1 Konstrukce

Přiblížení základní konstrukce PMSM je znázorněno na obrázku 1.1. Nákres je pouze ilustrativní, ale zobrazuje hlavní části PMSM: Vnější kruh představuje stator se zuby, na kterých je navinuto statorové vinutí (v obrázku není zobrazeno). Vnitřní kruh reprezentuje rotor, na jehož povrchu jsou umístěny permanentní magnety s barevně rozlišenými póly.

Často se lze setkat i s opačnou konstrukcí, kdy je stator umístěn uvnitř a rotor s magnety se otáčí kolem něj. Tato konstrukce PMSM nalézá využití k pohonu nejrůznějších vozidel, kdy lze motor umístit přímo dovnitř kola vozidla, dalším příkladem je pak přímý pohon bubnu automatické pračky. Existují však i další konstrukce PMSM, například s otočným statorem i rotorem.

Vyobrazená konstrukce (obrázek 1.1) je označována jako SMPMSM (*Surface Mounted PMSM*), tedy PMSM s magnety na povrchu. Další častou konstrukcí je IPMSM (*Inner PMSM*), kde jsou permanentní magnety umístěny uvnitř rotoru. Tyto stroje mají nepatrně odlišné vlastnosti, které ale mají významný vliv při návrhu řízení těchto strojů, detailněji bude rozebrána tato problematika dále v textu. Pod PMSM se ještě někdy zahrnují reluktanční motory, které jsou založeny na poněkud odlišném principu a nebudeme se jimi v textu zabývat.



Obrázek 1.1: Ilustrativní nákres konstrukce PMSM: Vnější kruh představuje stator se zuby, na kterých je navinuto statorové vinutí (v obrázku není zobrazeno). Vnitřní kruh reprezentuje rotor, na jehož povrchu jsou umístěny permanentní magnety s barevně rozlišenými póly.

1.1.2 Vlastnosti

Specifická konstrukce PMSM, stručně popsaná výše, má oproti asynchronním strojům a synchronním strojům s budícím vinutím celou řadu výhod, existují samozřejmě i některé nevýhody. Následující přehled základních odlišností od ostatních střídavých strojů čerpá ze zdrojů [38, 55, 61]:

Výhody

- rotor neobsahuje vinutí a tedy
  - je možno jej konstruovat menší, což je velmi výhodné v aplikacích, kde záleží na co nejmenší velikosti pohonu
  - je možno jej konstruovat lehčí, což snižuje hmotnost celého zařízení
  - má menší moment setrvačnosti rotoru
  - nedojde k poruše na rotorovém vinutí
- není třeba motor před rozběhem budit a nepotřebuje zdroj budícího proudu
- odpadá problém s přívodem proudu do buzení rotoru
- vyšší účinnost, protože nejsou jouleovy ztráty v:
  - rotoru oproti asynchronnímu stroji
  - buzení oproti synchronnímu stroji s buzením
- momentová přetížitelnost
- možnost konstrukce pomaluběžného stroje s dostatečným výkonem, který nepotřebuje převodovku, a tedy výhody spojené s absencí převodovky

Nevýhody

- technologicky složitější výroba kvůli připevňování permanentních magnetů na rotor
- složitější opravy
- vyšší cena z důvodu zanedbatelných nákladů na permanentní magnety
- menší robustnost
- problematické odbuzování a klesající účinnost při odbuzování
- závislost magnetických vlastností permanentních magnetů na teplotě a tedy nutnost dobrého chlazení
- stálá přítomnost budícího pole v motoru, následně při využití například k pohonu vozidla, dojde-li poruše a následném odtahu, funguje motor jako generátor
- problematika zkratu, při které může teoreticky dojít až k demagnetizaci permanentních magnetů
- *problematika spojená s návrhem řízení těchto strojů*

Právě poslední zmiňovaný nedostatek, to jest komplikace při návrhu řízení PMSM a způsoby jak se s tímto nedostatkem vypořádat jsou ústředním tématem této práce.

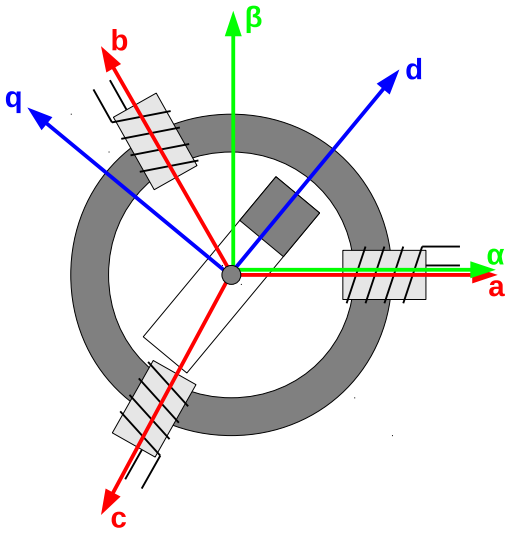
1.2 Matematický model PMSM

Aby bylo možno systém PMSM lépe pochopit, pracovat s ním, odvozovat algoritmy pro jeho řízení a simulovat jeho chování je nutné jej vhodným způsobem popsat. Za tímto účelem bude následovat popis modelu tohoto zařízení v podobě diferenciálních a případně diferenčních rovnic zachycující jeho chování.

1.2.1 Souřadné soustavy

K popisu PMSM se užívá dvou kvalitativně zcela rozdílných typů fyzikálních veličin. V prvním případě se jedná o veličiny mechanické jako poloha (úhel natočení rotoru) a otáčky (rychlost otáčení), dále pak zátěžný moment nebo tření. Druhým uvažovaným typem jsou veličiny elektrické, především elektrické proudy a napětí, a dále indukčnosti a rezistance.

Elektrické veličiny se nejčastěji uvažují v jednom ze tří souřadných systémů znázorněných na obrázku 1.2. Souřadný systém $a-b-c$ uvažuje tři osy (a, b, c) ve směru os vinutí jednotlivých fází. Protože však elektrické veličiny v jednotlivých osách systému $a-b-c$ nebývají vzájemně nezávislé a jsou svázány nějakým vztahem, je obvykle využíván popis v soustavě $\alpha-\beta$. Tato souřadná soustava je opět svázána se statorem. Osa α je totožná s osou a, osa β je na osu α kolmá a tvoří tak ortogonální systém. Pro mnoho aplikací se však ukazuje výhodným přejít do rotující souřadné soustavy $d-q$ svázané s rotorem. Osa d je pak umístěna ve směru osy permanentního magnetu a směřuje k jeho severnímu pólu, osa q je na ni kolmá.



Obrázek 1.2: Souřadné systémy používané pro popis PMSM znázorněné na zjednodušeném modelu: na statorové části jsou umístěny pouze tři cívky reprezentující statorová vinutí jednotlivých fází a jako rotor pak slouží jediný permanentní magnet. $a-b-c$ ve směru os vinutí jednotlivých fází, $\alpha-\beta$ statorová ortogonální soustava a $d-q$ rotorová ortogonální soustava.

1.2.2 Transformace souřadnic

Žádnou z výše zmiňovaných souřadných soustav nelze označit za univerzálně nejlepší. Pro každý účel se nejlépe hodí jen některá z nich a proto je důležité umět mezi nimi přecházet, tedy převádět jednotlivé veličiny.

Transformace $a-b-c \longleftrightarrow \alpha-\beta$

Tato transformace se označuje také jako Clarkova transformace, rovnice lze nalézt například v [20], případně je možné je odvodit.

Osa α je totožná s osou a, osy b a c pak uvažujeme oproti ní otočeny o $\pm 120°$. Souřadnice v ose α tedy získáme následujícím průmětem z os a, b, c

$$\alpha = k\left(a + b\cdot\cos(120°) + c\cdot\cos(-120°)\right) = k\left(a - \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}c\right),$$

kde k značí normovací konstantu $k = \frac{2}{3}$. Obdobně postupujeme v případě osy β. Osa a je na ní kolmá a tedy její příspěvek je nulový. Osy b a c promítnuté do osy β získáme vztah

$$\beta = k\left(b\cdot\sin(120°) + c\cdot\sin(-120°)\right) = k\left(\frac{\sqrt{3}}{2}b - \frac{\sqrt{3}}{2}c\right).$$

Celkem tedy máme rovnice

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{2}{3}\left(a - \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}c\right), \\ \beta &= \frac{\sqrt{3}}{3}\left(b - c\right). \end{aligned}$$

Pro inverzní transformaci platí následující vztahy

$$\begin{aligned} a &= \alpha + \theta, \\ b &= \left(-\frac{1}{2}\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\beta\right) + \theta, \\ c &= \left(-\frac{1}{2}\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}\beta\right) + \theta, \end{aligned}$$

kde θ představuje takzvanou nulovou složku $\theta = \frac{1}{3}\left(a + b + c\right)$.

Transformace $\alpha - \beta \longleftrightarrow d - q$

Transformace je označována jako Parkova transformace a představuje přechod do rotujícího souřadného systému. Rovnice transformace lze najít opět například v [20], ale jedná se běžnou lineární operaci rotace.

Uvažujeme tedy otočení soustavy $d-q$ oproti $\alpha-\beta$ o úhel ϕ kolem společného počátku souřadných soustav, což vede na převodní vztah

$$\begin{pmatrix} d \\ q \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}. \tag{1.1}$$

Inverzní transformace je

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{pmatrix} d \\ q \end{pmatrix}. \tag{1.2}$$

Alternativně bude v textu použito i komplexního zápisu souřadných soustav $\alpha - \beta$ a $d - q$. Transformace mezi nimi pak bude zapisována jako násobení $e^{j\phi}$ pro transformaci z $d - q$ do $\alpha - \beta$, respektive $e^{-j\phi}$ pro transformaci opačnou.

1.2.3 Model PMSM

Pro tvorbu modelu PMSM vyjdeme z fyzikálních zákonů popisujících hlavní děje odehrávající se v synchronním stroji. Jedná se především o jevy elektrické, mechanické a vzájemnou přeměnu elektrické a mechanické energie. Složitější jevy jako proměnlivost parametrů s teplotou, sycení materiálu magnetickým tokem, případně vliv napájecí elektroniky v tomto modelu uvažovány nebudou. Fyzikální vztahy a zákony pro odvození rovnic PMSM jsou čerpány z [15, 16].

Rovnice pro proudy

Cílem je odvodit rovnice pro PMSM a tedy vyjádřit, jak na sobě hlavní veličiny popisující tento systém navzájem závisejí a jak se vyvíjejí v čase. Vyjdeme ze vztahu pro napětí v obvodu statoru. Statorové napětí u_s uvažujeme zapsané ve souřadné soustavě $\alpha - \beta$ ve smyslu $s = \alpha + j\beta$ (kde j značí komplexní jednotku) a dále uvažujeme, že je obecně funkcí času $u_s = u_s(t)$. Toto napětí lze vyjádřit jako součet napětí souvisejícího s průchodem proudu obvodem a dále jako indukovaného napětí v důsledku elektromagnetické indukce. První z těchto členů lze vyjádřit pomocí Ohmova zákona v závislosti na proudu. Indukované napětí je na základě Faradayova zákona elektromagnetické indukce rovno změně magnetického toku v čase. Uvažujme tedy, že proud procházející statorem i_s i magnetický tok ve stroji ψ_s zapsaný ve statorové souřadné soustavě jsou opět funkcemi času: $i_s = i_s(t)$ a $\psi_s = \psi_s(t)$. Rovnici pro napětí pak získáme ve tvaru

$$u_s = R_s i_s + \frac{d\psi_s}{dt}, \tag{1.3}$$

kde R_s je rezistance a předpokládáme ji známou a konstantní.

Nyní je třeba vyjádřit hodnotu magnetického toku ψ_s. Magnetický tok vzniká ve stroji jednak ve statorovém vinutí a dále v důsledku působení permanentních magnetů. Statorové vinutí je z fyzikálního pohledu cívkou a tedy magnetický tok je přímo úměrný proudu procházejícímu touto cívkou: $\psi_s^{civka} = L_s i_s$, kde L_s označuje indukčnost cívky, kterou předpokládáme konstantní, známou a prozatím izotropní. Tok permanentních magnetů označíme jako ψ_{pm} a považujeme jej za známou konstantu. Rotor obsahující permanentní magnety je však obecně natočen a tok permanentních magnetů je směrován pouze do směru osy d. Úhel natočení, označme jej jako ϑ, budeme opět uvažovat jako funkci času $\vartheta = \vartheta(t)$. Rovnice pro celkový magnetický tok ve stroji tedy je

$$\psi_s = L_s i_s + \psi_{pm} e^{j\vartheta}, \tag{1.4}$$

kde násobení $e^{j\vartheta}$ představuje zmiňovanou rotaci o úhel ϑ při použití komplexního zápisu.

Když nyní dosadíme rovnici (1.4) pro magnetický tok do rovnice pro napětí (1.3) a provedeme derivaci, získáme

$$u_s = R_s i_s + \frac{d\left(L_s i_s + \psi_{pm} e^{j\vartheta}\right)}{dt} = R_s i_s + L_s \frac{di_s}{dt} + j\psi_{pm} \frac{d\vartheta}{dt} e^{j\vartheta}.$$

V této rovnici nově vystupuje veličina $\frac{d\vartheta}{dt}$ představující změnu polohy v čase, označíme ji jako otáčky

$$\omega = \frac{d\vartheta}{dt}. \tag{1.5}$$

Pro obdržení diferenciálních rovnic pro proudy v soustavě $\alpha - \beta$ rozepíšeme zvlášť reálnou a imaginární složku statorove soustavy s ($s = \alpha + j\beta$). Rovnice tedy jsou

$$\begin{aligned} u_\alpha &= R_s i_\alpha + L_s \frac{di_\alpha}{dt} - \psi_{pm}\omega \sin\vartheta, \\ u_\beta &= R_s i_\beta + L_s \frac{di_\beta}{dt} + \psi_{pm}\omega \cos\vartheta, \end{aligned}$$

a případně je možno je upravit na

$$\begin{aligned} \frac{di_\alpha}{dt} &= -\frac{R_s}{L_s} i_\alpha + \frac{\psi_{pm}}{L_s} \omega \sin \vartheta + \frac{1}{L_s} u_\alpha, \\ \frac{di_\beta}{dt} &= -\frac{R_s}{L_s} i_\beta - \frac{\psi_{pm}}{L_s} \omega \cos \vartheta + \frac{1}{L_s} u_\beta. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Stejné rovnice používají například v [32, 41]. Rovnice v soustavě $d-q$ je z nich možno získat aplikováním transformace popsané rovnicí (1.1).

Rovnice pro otáčky

V odvození rovnic (1.6) byla zavedena veličina ω, viz rovnice (1.5), popisující hodnotu otáček (změny polohy) v čase. Má-li být model PMSM úplný, je třeba odvodit rovnici i pro otáčky ω.

Protože se jedná o mechanickou veličinu, budeme vycházet ze základních zákonů mechaniky. Nejdříve užijeme vztahu pro točivý moment T, který budeme považovat za funkci času $T = T(t)$. Točivý moment lze vyjádřit jako $T = \frac{dl}{dt}$, kde l značí moment hybnosti. Pro ten dále platí $l = J\omega_{mech}$, kde J označuje moment setrvačnosti a předpokládáme ho jako známou konstantu, ω_{mech} jsou mechanické otáčky. Mechanické otáčky odpovídají skutečnému otáčení stroje a liší se od otáček elektrických ω vystupujících v rovnicích (1.6) pro proudy a jejich odvození. Vztah těchto dvou typů otáček je dán rovnicí

$$\omega = p_p \omega_{mech}, \tag{1.7}$$

kde hodnota p_p představuje počet párů pólů (tedy polovina počtu pólů) permanentních magnetů stroje.

Dalším důležitým poznatkem je, že při působení více točivých momentů se tyto momenty sčítají a tedy platí

$$T_1 + \ldots + T_n = \frac{dl}{dt} = \frac{d\left(J\omega_{mech}\right)}{dt} = J\frac{d\omega_{mech}}{dt}. \tag{1.8}$$

Jednotlivé uvažované točivé momenty T_i jsou:

1. moment získaný konverzním procesem elektrické energie, který vyjadřuje hlavní vlastnost elektrického motoru – převod elektrické energie na mechanickou: $T_1 = T_{el}$
2. zátěžný moment reprezentující zatížení stroje, tedy to, co je motorem poháněno; působí však v opačném směru (proti pohybu): $T_2 = -T_L$
3. moment v důsledku tření (mechanické ztráty ve stroji), působí opět proti pohybu a uvažujeme jej lineárně závislý na otáčkách s koeficientem viskozity (tření) B: $T_3 = -B\omega_{mech}$

Celkem tedy rovnice (1.8) po dosazení konkrétních momentů přejde na

$$T_{el} - T_L - B\omega_{mech} = J\frac{d\omega_{mech}}{dt}. \tag{1.9}$$

Zátěžný moment T_L sice uvažujeme obecně proměnný v čase, ale vzhledem k tomu, že představuje externí zátěž stroje, není možnost jej jakkoliv předvídat, popřípadě vhodně vyjádřit na základě jiných veličin. V rovnicích tedy bude nadále vystupovat pod označením T_L a budeme jej považovat za neznámou funkci času.

Moment T_{el} však lze vyjádřit na základě elektrických veličin. Využijeme k tomu výpočet přes okamžitý výkon. Ten je pro trojfázový systém (v souřadnicích $a-b-c$) roven $P = u_a i_a + u_b i_b + u_c i_c$. Po provedení transformace do souřadnic $\alpha - \beta$ je vyjádřen ve tvaru

$$P = k_p \left(u_\alpha i_\alpha + u_\beta i_\beta\right), \tag{1.10}$$

kde k_p značí Parkovu konstantu s hodnotou $k_p = \frac{3}{2}$. Jako napětí zde uvažujeme indukované napětí u_{ind}, to jest druhý člen v rovnici (1.3), protože první člen této rovnice je napětí, které se podílí na tepelném výkonu stroje – ztrátách. Tedy pro indukované napětí platí, viz rovnice (1.3) a (1.4):

$$u_{ind} = \frac{d\psi_s}{dt} = \frac{d\left(L_s i_s + \psi_{pm} e^{j\vartheta}\right)}{dt} = L_s \frac{di_s}{dt} + j\psi_{pm}\omega e^{j\vartheta}.$$

Z indukovaného napětí navíc využijeme pouze složku reprezentovanou druhým výrazem, protože první složka obsahující derivace proudů slouží k tvorbě samotného magnetického pole stroje a nepodílí se na tvorbě výkonu. Následně v souřadném systému $\alpha-\beta$ získáme vyjádření indukovaných napětí podílejících se na výkonu jako

$$\begin{aligned} u_{ind,\alpha} &= -\psi_{pm}\omega \sin\vartheta, \\ u_{ind,\beta} &= \psi_{pm}\omega \cos\vartheta \end{aligned}$$

a po dosazení do (1.10) je

$$P = k_p \left(-\psi_{pm} i_\alpha \omega \sin\vartheta + \psi_{pm} i_\beta \omega \cos\vartheta\right). \tag{1.11}$$

Okamžitý výkon lze také vyjádřit z mechanických veličin jako

$$P = \omega_{mech} T_{el} \tag{1.12}$$

a dosazením z (1.11) již získáme vyjádření pro mement T_{el} ve tvaru:

$$T_{el} = \frac{P}{\omega_{mech}} = \frac{k_p}{\omega_{mech}} \left(-\psi_{pm} i_\alpha \omega \sin\vartheta + \psi_{pm} i_\beta \omega \cos\vartheta\right),$$

což lze pomocí vztahu (1.7) upravit na

$$T_{el} = k_p p_p \left(-\psi_{pm} i_\alpha \sin\vartheta + \psi_{pm} i_\beta \cos\vartheta\right).$$

Stejnou rovnici pro moment T_{el} používají například v [32]. Dosazení do rovnice (1.9) pak vede na tvar

$$k_p p_p \psi_{pm} \left(-i_\alpha \sin\vartheta + i_\beta \cos\vartheta\right) - T_L - B\omega_{mech} = J\frac{d\omega_{mech}}{dt}.$$

Tuto rovnice lze opět užitím vztahu (1.7) upravit tak, aby v ní vystupovali elektrické otáčky ω a dále z rovnice vyjádřit jejich derivaci

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{k_p p_p^2 \psi_{pm}}{J} \left(i_\beta \cos\vartheta - i_\alpha \sin\vartheta\right) - \frac{p_p}{J} T_L - \frac{B}{J}\omega. \tag{1.13}$$

Rovnici pro otáčky v této podobě (1.13) lze nalézt například v [41].

Rovnice pro proudy při různých indukčnostech

Pro použití s některými, především injektážními, metodami je do modelu PMSM třeba zahrnout anizotropie, které následně usnadní odhadování polohy. Možností, jak zavést anizotropie je uvažování různých indukčností v osách d a q. Tyto osy jsou svázány s rotorem a tedy i s permanentními magnety na něm, viz obrázek 1.2. Tok permanentních magnetů interaguje s cívkami statoru a mění jejich vlastnosti, což vede právě na rozdílné indukčnosti v osách d a q. Tedy místo jediné izotropní L_s nyní uvažujeme různé $L_d \neq L_q$, nadále je však považujeme za známé konstanty. Postup odvození rovnic bude analogický předchozímu odvození pro stejné indukčnosti s tím rozdílem, že bude užito soustavy $d-q$. Opět vyjdeme z rovnice (1.3), kde za veličiny ve statorové souřadné soustavě s dosadíme veličiny v rotorové soustavě $d-q$ ve smyslu $r = d + jq$ otočené o úhel ϑ. Tedy

$$u_r e^{j\vartheta} = R_s i_r e^{j\vartheta} + \frac{d\left(\psi_r e^{j\vartheta}\right)}{dt}$$

a po zderivování

$$u_r e^{j\vartheta} = R_s i_r e^{j\vartheta} + \frac{d\psi_r}{dt} e^{j\vartheta} + j\psi_r \omega e^{j\vartheta}.$$

Nyní je možné zkrátit člen $e^{j\vartheta}$ představující rotaci a získáme rovnici pro napětí ve tvaru

$$u_r = R_s i_r + \frac{d\psi_r}{dt} + j\psi_r \omega. \tag{1.14}$$

Magnetický tok v osách $d-q$ je vyjádřen podobně, jako pro stejné indukčnosti, jako součet toku indukovaného cívkami a toku permanentních magnetů, tedy

$$\begin{aligned} \psi_d &= L_d i_d + \psi_{pm}, \\ \psi_q &= L_q i_q \end{aligned}$$

a ψ_{pm} se projeví pouze v první rovnici, protože tok permanentních magnetů uvažujeme pouze ve směru osy d. Po dosazení vztahů pro toky do rovnice (1.14) a jejím rozepsání zvlášť na reálnou a imaginární složku rotorové souřadné soustavy r získáme rovnice

$$\begin{aligned} u_d &= R_s i_d + L_d \frac{di_d}{dt} - L_q i_q \omega, \\ u_q &= R_s i_q + L_q \frac{di_q}{dt} + \left(L_d i_d + \psi_{pm}\right)\omega. \end{aligned}$$

Opět je možno vyjádřit derivace proudů a získat rovnice pro proudy v soustavě $d-q$ ve tvaru

$$\begin{aligned} \frac{di_d}{dt} &= -\frac{R_s}{L_d} i_d + \frac{L_q}{L_d} i_q \omega + \frac{1}{L_d} u_d, \\ \frac{di_q}{dt} &= -\frac{R_s}{L_q} i_q - \frac{L_d}{L_q} i_d \omega - \frac{\psi_{pm}}{L_q} \omega + \frac{1}{L_q} u_q. \end{aligned} \tag{1.15}$$

Tyto rovnice používají například v [10, 22, 23]. Rovnice pro proudy v soustavě $\alpha - \beta$ lze získat transformováním rovnic (1.15) pomocí vztahu (1.2), tyto rovnice však již mají relativně dosti komplikovaný zápis.

Rovnice pro otáčky při různých indukčnostech

Postup odvození rovnice pro otáčky při uvažování různých indukčností je opět podobný jako v případě stejných indukčností. Pro momenty platí opět rovnice (1.9):

$$T_{el} - T_L - B\omega_{mech} = J \frac{d\omega_{mech}}{dt},$$

kde T_{el} vypočteme přes okamžitý elektrický výkon. Užijeme tedy rovnice (1.10) a provedeme transformaci souřadnic danou vztahem (1.2):

$$P = k_p \left(u_\alpha i_\alpha + u_\beta i_\beta \right) = k_p \left(u_d i_d + u_q i_q \right).$$

Nyní za napětí dosadíme indukovaná napětí bez složek obsahující derivace proudů, tedy

$$\begin{aligned} u_{ind,d} &= -L_q i_q \omega, \\ u_{ind,q} &= \left(L_d i_d + \psi_{pm} \right) \omega \end{aligned}$$

a následně po dosazení do rovnice pro výkon získáme

$$P = k_p \left(\left(L_d - L_q \right) i_d i_q + \psi_{pm} i_q \right) \omega.$$

Výsledkem užitím vztahu pro okamžitý výkon P a moment T_{el}, viz rovnice (1.12), a převodního vztahu pro otáčky (1.7) je rovnice

$$T_{el} = k_p p_p \left(\left(L_d - L_q \right) i_d i_q + \psi_{pm} i_q \right)$$

a po dosazení do rovnice pro momenty (1.9), užití převodního vztahu (1.7) a vyjádření derivací získáme rovnici pro otáčky ve tvaru

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{k_p p_p^2}{J} \left(\left(L_d - L_q \right) i_d i_q + \psi_{pm} i_q \right) - \frac{p_p}{J} T_L - \frac{B}{J} \omega, \tag{1.16}$$

který lze rovněž najít v [10, 23].

Shrnutí rovnic pro PMSM

Pro přehlednost je ještě uvedeno shrnutí výše odvozených rovnic popisujících PMSM. Nejdříve soustava rovnic v souřadnicích $\alpha - \beta$ při uvažování stejných indukčností, tedy rovnice (1.6), (1.13) a (1.5):

$$\begin{aligned}
\frac{di_\alpha}{dt} &= -\frac{R_s}{L_s} i_\alpha + \frac{\psi_{pm}}{L_s}\omega \sin\vartheta + \frac{1}{L_s} u_\alpha, \\
\frac{di_\beta}{dt} &= -\frac{R_s}{L_s} i_\beta - \frac{\psi_{pm}}{L_s}\omega \cos\vartheta + \frac{1}{L_s} u_\beta, \\
\frac{d\omega}{dt} &= \frac{k_p p_p^2 \psi_{pm}}{J} \left(i_\beta \cos\vartheta - i_\alpha \sin\vartheta\right) - \frac{p_p}{J} T_L - \frac{B}{J}\omega, \\
\frac{d\vartheta}{dt} &= \omega.
\end{aligned} \tag{1.17}$$

Následuje soustava pro různé indukčnosti L_d a L_q v souřadné soustavě $d - q$ vzniklá spojením rovnic (1.15), (1.16) a (1.5):

$$\begin{aligned}
\frac{di_d}{dt} &= -\frac{R_s}{L_d} i_d + \frac{L_q}{L_d} i_q \omega + \frac{1}{L_d} u_d, \\
\frac{di_q}{dt} &= -\frac{R_s}{L_q} i_q - \frac{L_d}{L_q} i_d \omega - \frac{\psi_{pm}}{L_q}\omega + \frac{1}{L_q} u_q, \\
\frac{d\omega}{dt} &= \frac{k_p p_p^2}{J} \left(\left(L_d - L_q\right) i_d i_q + \psi_{pm} i_q\right) - \frac{p_p}{J} T_L - \frac{B}{J}\omega, \\
\frac{d\vartheta}{dt} &= \omega.
\end{aligned} \tag{1.18}$$

1.2.4 Diskrétní model PMSM

Vzhledem k uvažované implementaci řídících a odhadovacích algoritmů na digitálních počítačích je výhodnější uvažovat diskrétní systém. Diferenciální rovnice (1.17) případně (1.18) je tedy třeba diskretizovat a za tímto účelem bude v textu užito Eulerovy metody, kdy je derivace nahrazena dopřednou diferencí. Toto diskretizační schéma je sice méně přesné, ale oproti tomu je jednoduché na výpočet a tedy dostatečně rychlé. Diskretizační časový krok je volen s ohledem na reálný systém, kde odpovídá vzorkovací frekvenci použitých senzorů. To je obvykle velmi krátký časový okamžik (řádově sto mikrosekund) a chyba v důsledku diskretizace Eulerovou metodou tedy není velká. Významnějším důvodem pro tuto metodu je však uvažování praktické aplikace v reálném čase, kdy je třeba v průběhu jedné vzorkovací periody vypočítat odhad stavových veličin a následně řídící zásah. Jednodušší diferenční rovnice, znamenají jednodušší popis systému a tedy rychlejší výpočet všech uvažovaných algoritmů nezbytný pro potenciální nasazení v reálné aplikaci.

S užíváním diferenčních rovnic jsou však spojeny jisté komplikace. Zatímco diferenciální rovnice popisující PMSM (1.17) a (1.18) lze libovolně převádět mezi jednotlivými souřadnými systémy pomocí vztahů (1.1) a (1.2), pro odpovídající rovnice diferenční to pravda není a jejich převod transformacemi (1.1) a (1.2) nedává vždy dobrý výsledek.

Pro odvození diferenčních rovnic v konkrétní souřadné soustavě je tedy třeba postupovat ve dvou krocích. Nejprve převést vybranou soustavu rovnic (1.17) nebo (1.18) do zvolené souřadné soustavy. Následně je pak možné provést diskretizaci.

Prvním krokem při návrhu řízení motoru je obvykle zvládnutí řízení stroje bez zátěže. Z tohoto důvodu je často uvažován nulový zátěžný moment a proto pro budou obvykle uvedeny rovnice bez něj.

Diskrétní rovnice pro stejné indukčnosti v souřadné soustavě $\alpha - \beta$

Pro odvození těchto rovnic vyjdeme ze soustavy diferenciálních rovnic (1.17) a užijeme zmiňované Eulerovy metody. Derivaci tedy nahradíme konečnou diferencí

$$\frac{dx}{dt}(t) = \frac{x_{t+1} - x_t}{\Delta t},$$

kde Δt představuje diskretizační časový krok. Po úpravě je výsledná diskrétní soustava rovnic ve tvaru

$$\begin{aligned}
i_{\alpha,t+1} &= \left(1 - \frac{R_s}{L_s}\Delta t\right) i_{\alpha,t} + \frac{\psi_{pm}\Delta t}{L_s}\omega_t \sin\vartheta_t + \frac{\Delta t}{L_s}u_{\alpha,t}, \\
i_{\beta,t+1} &= \left(1 - \frac{R_s}{L_s}\Delta t\right) i_{\beta,t} - \frac{\psi_{pm}\Delta t}{L_s}\omega_t \cos\vartheta_t + \frac{\Delta t}{L_s}u_{\beta,t}, \\
\omega_{t+1} &= \left(1 - \frac{B}{J}\Delta t\right)\omega_t + \frac{k_p p_p^2 \psi_{pm}}{J}\Delta t\left(i_{\beta,t}\cos\vartheta_t - i_{\alpha,t}\sin\vartheta_t\right) - \frac{p_p}{J}T_L\Delta t, \\
\vartheta_{t+1} &= \vartheta_t + \omega_t\Delta t.
\end{aligned}$$

Pro zjednodušení zavedeme následující značení

$$\begin{aligned}
a &= 1 - \frac{R_s}{L_s}\Delta t, \\
b &= \frac{\psi_{pm}}{L_s}\Delta t, \\
c &= \frac{\Delta t}{L_s}, \\
d &= 1 - \frac{B}{J}\Delta t, \\
e &= \frac{k_p p_p^2 \psi_{pm}}{J}\Delta t
\end{aligned} \tag{1.19}$$

a předpokládáme-li zátěžný moment nulový $T_L = 0$, rovnice pak přejdou na tvar

$$\begin{aligned}
i_{\alpha,t+1} &= a i_{\alpha,t} + b\omega_t \sin\vartheta_t + c u_{\alpha,t}, \\
i_{\beta,t+1} &= a i_{\beta,t} - b\omega_t \cos\vartheta_t + c u_{\beta,t}, \\
\omega_{t+1} &= d\omega_t + e\left(i_{\beta,t}\cos\vartheta_t - i_{\alpha,t}\sin\vartheta_t\right), \\
\vartheta_{t+1} &= \vartheta_t + \omega_t\Delta t.
\end{aligned} \tag{1.20}$$

Diskrétní rovnice pro stejné indukčnosti v souřadné soustavě $d-q$

Opět vyjdeme ze soustavy diferenciálních rovnic (1.17)a pomocí převodního vztahu (1.2) transformujeme první dvě rovnice ze souřadné soustavy $\alpha-\beta$ do $d-q$:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(i_d\cos\vartheta - i_q\sin\vartheta\right) &= -\frac{R_s}{L_s}\left(i_d\cos\vartheta - i_q\sin\vartheta\right) + \frac{\psi_{pm}}{L_s}\omega\sin\vartheta + \\
&+ \frac{1}{L_s}\left(u_d\cos\vartheta - u_q\sin\vartheta\right), \qquad (1.21)\\
\frac{d}{dt}\left(i_d\sin\vartheta + i_q\cos\vartheta\right) &= -\frac{R_s}{L_s}\left(i_d\sin\vartheta + i_q\cos\vartheta\right) - \frac{\psi_{pm}}{L_s}\omega\cos\vartheta + \\
&+ \frac{1}{L_s}\left(u_d\sin\vartheta + u_q\cos\vartheta\right).
\end{aligned}$$

Upravíme derivace v předchozích dvou rovnicích (1.21)

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(i_d\cos\vartheta - i_q\sin\vartheta\right) &= \frac{di_d}{dt}\cos\vartheta - \frac{di_q}{dt}\sin\vartheta - i_d\omega\sin\vartheta - i_q\omega\cos\vartheta,\\
\frac{d}{dt}\left(i_d\sin\vartheta + i_q\cos\vartheta\right) &= \frac{di_d}{dt}\sin\vartheta + \frac{di_q}{dt}\cos\vartheta + i_d\omega\cos\vartheta - i_q\omega\sin\vartheta.
\end{aligned}$$

Nyní zřejmě získáme diferenciální rovnici pro i_d vynásobením první rovnice (1.21) hodnotou $\cos\vartheta$ a přičtením druhé rovnice (1.21) násobené $\sin\vartheta$. Obdobně rovnici pro i_q získáme násobením první rovnice (1.21) hodnotou $-\sin\vartheta$ a přičtením druhé rovnice (1.21) násobené $\cos\vartheta$. Upravené diferenciální rovnice pro i_d a i_q jsou ve tvaru

$$\begin{aligned}
\frac{di_d}{dt} &= -\frac{R_s}{L_s}i_d - i_q\omega + \frac{u_d}{L_s},\\
\frac{di_q}{dt} &= i_d\omega - \frac{R_s}{L_s}i_q - \frac{\psi_{pm}}{L_s}\omega + \frac{u_q}{L_s}.
\end{aligned}$$

Rovnici pro otáčky ω lze snadno transformovat na základě faktu, že výraz $i_\beta\cos\vartheta - i_\alpha\sin\vartheta$ přímo odpovídá i_q a tedy

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{k_p p_p^2\psi_{pm}}{J}i_q - \frac{B}{J}\omega - \frac{p_p}{J}T_L.$$

Rovnice popisující změnu polohy v čase je samozřejmě stejná

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \omega.$$

Provedení diskretizace je analogické jako v předchozím odstavci pro soustavu v $\alpha-\beta$ souřadnicích a výsledkem je následující soustava diskrétních rovnic

$$\begin{aligned}
i_{d,t+1} &= \left(1 - \frac{R_s}{L_s}\Delta t\right)i_{d,t} + \Delta t\cdot i_{q,t}\omega_t + \frac{\Delta t}{L_s}u_{d,t},\\
i_{q,t+1} &= \left(1 - \frac{R_s}{L_s}\Delta t\right)i_{q,t} - \Delta t\cdot i_{d,t}\omega_t - \frac{\psi_{pm}\Delta t}{L_s}\omega_t + \frac{\Delta t}{L_s}u_{q,t},\\
\omega_{t+1} &= \left(1 - \frac{B}{J}\Delta t\right)\omega_t + \Delta t\frac{k_p p_p^2\psi_{pm}}{J}i_{q,t} - \frac{p_p}{J}T_L\Delta t,\\
\vartheta_{t+1} &= \vartheta_t + \omega_t\Delta t.
\end{aligned}$$

Při použití stejného zjednodušujícího značení (1.19) a předpokladu nulového zátěžného momentu jsou rovnice ve tvaru

$$\begin{aligned} i_{d,t+1} &= a i_{d,t} + \Delta t \cdot i_{q,t}\omega_t + c u_{d,t}, \\ i_{q,t+1} &= a i_{q,t} - \Delta t \cdot i_{d,t}\omega_t - b\omega_t + c u_{q,t}, \\ \omega_{t+1} &= d\omega_t + e i_{q,t}, \\ \vartheta_{t+1} &= \vartheta_t + \omega_t \Delta t. \end{aligned} \tag{1.22}$$

Diskrétní rovnice pro různé indukčnosti v souřadné soustavě $d-q$

Nyní vyjdeme ze soustavy diferenciálních rovnic (1.18) a diskretizaci provedeme opět stejným způsobem pomocí Eulerovy metody. Popis PMSM pomocí diferenčních rovnic v souřadné soustavě $d-q$ při uvažování různých indukčností L_d a L_q nyní bude

$$\begin{aligned} i_{d,t+1} &= \left(1 - \frac{R_s}{L_d}\Delta t\right) i_{d,t} + \frac{L_q \Delta t}{L_d} i_{q,t}\omega_t + \frac{\Delta t}{L_d} u_{d,t}, \\ i_{q,t+1} &= \left(1 - \frac{R_s}{L_q}\Delta t\right) i_{q,t} - \frac{L_d \Delta t}{L_q} i_{d,t}\omega_t - \frac{\psi_{pm}\Delta t}{L_q}\omega_t + \frac{\Delta t}{L_q} u_{q,t}, \\ \omega_{t+1} &= \left(1 - \frac{B}{J}\Delta t\right)\omega_t + \frac{k_p p_p^2 \Delta t}{J}\left(\left(L_d - L_q\right) i_{d,t} i_{q,t} + \psi_{pm} i_{q,t}\right), \\ \vartheta_{t+1} &= \vartheta_t + \omega_t \Delta t. \end{aligned} \tag{1.23}$$

Zátěžný moment T_L je opět považován za nulový, ale další zjednodušující označení konstant v tomto případě zaváděno nebude.

Diskrétní rovnice pro různé indukčnosti v souřadné soustavě $\alpha-\beta$

Postup odvození těchto rovnic je podobný jako v případě rovnic v soustavě $d-q$ pro stejné indukčnosti. Do soustavy (1.18) jsou dosazeny proudy transformované pomocí (1.1) a následně jsou první dvě rovnice násobeny $\sin\vartheta$ nebo $\cos\vartheta$ a sečteny, případně odečteny. Výsledné vztahy v soustavě $\alpha-\beta$ mají ale poměrně komplikovaný zápis a proto nebudou uváděny přímo zde v textu, lze je však nalézt v příloze.

1.2.5 Stochastický model PMSM

Lze samozřejmě očekávat, že výše odvozené rovnice nevystihují chování reálného stroje zcela přesně. Tento fakt má celou řadu nejrůznějších příčin, které nelze obecně odstranit. Místo toho je lepší uvažovat jistou míru nepřesnosti užívaných rovnic a modelovat ji jako šum.

Hlavní příčiny neurčitosti v PMSM

Následující popis neurčitostí v PMSM způsobující nepřesnost modelu vychází z [41]:

Nepřesnost rovnic popisujících reálný stroj:

- zanedbání složitějších efektů v modelu jako závislost parametrů na teplotě nebo saturace magnetickým tokem
- nejsou známy přesné hodnoty parametrů stroje
- vliv neznámého zátěžného momentu
- vliv diskretizace rovnic a užití jednoduché Eulerovy metody

Vliv užití reálných zařízení:

- chyby měření a zaokrouhlovací chyby senzorů
- skutečná napětí ve stroji se liší od požadovaných v důsledku napájecí elektroniky (PWM, invertor)
  - efekt mrtvých časů
  - nelineární úbytky napětí v důsledku voltamperové charakteristiky napájecí elektroniky
- nedokonalosti samotného motoru – zařízení není nikdy vyrobeno přesně, výskyt nesymetrií a anizotropických vlastností rotoru nebo samotných permanentních magnetů

V důsledku bezsenzorového návrhu pak dále přibývá neznalost:

- počáteční polohy
- polohy při provozu stroje
- velikosti otáček při provozu stroje
- směru otáčení (viz následující odstavec)

Symetrie rovnic stroje

Při popisu PMSM pomocí jeho rovnic (1.17) v souřadné soustavě $\alpha - \beta$ zle vypozorovat symetrii těchto rovnic na substituci stavových veličin $(\omega, \vartheta) \longleftrightarrow (-\omega, \vartheta + \pi)$. V důsledku bezsenzorového návrhu pak při užití modelu stroje založeného na těchto rovnicích nelze poznat, která ze symetrických verzí (ω, ϑ) a $(-\omega, \vartheta + \pi)$ je realizována. Tento problém je však zcela zásadní, protože se jedná o otáčení stroje na opačnou stranu. Pro správný běh stroje je tedy třeba vhodně odhadovat polohu ϑ v celém intervalu $\langle -\pi, \pi \rangle$ nebo alternativně znaménko otáček $\operatorname{sign} \omega$.

Použitý šum

Seznam výše popsaných vlivů způsobujících nepřesnost uvažovaného modelu stroje se pokusíme zahrnout pod vhodný model šumu. Skutečný šum, který se vyskytuje na reálném stroji, lze očekávat velmi komplikovaný a jeho popis není ani prakticky realizovatelný. Výhodnější tedy je uvažovat některý z klasických modelů šumu a jeho parametry nastavit tak, aby co nejlépe zachycoval průběh neurčitosti.

V tomto textu bude uvažován model aditivního vzájemně nezávislého bílého Gaussovského šumu. Jedná se o relativně jednoduchý model šumu, ale jeho výhodou je, že pro něj existuje celá řada efektivních algoritmů. Střední hodnota pro šum bude uvažována nulová a kovarianční matice je nutno vhodně zvolit s ohledem na výše popsané neurčitosti. K této volbě lze přistupovat buď na základě odhadu parametrů normálního rozdělení, detailněji popsáno v [41], nebo je lze volit experimentálně.

Zmiňovaný šum bude uvažován obecně dvou typů. Jedná se šum v samotném systému, který odráží především chyby modelu. Budeme předpokládat, že tento šum se projevuje v odvozených rovnicích (1.17) a (1.18) pro popis stavu systému, případně v některé jejich diskrétní verzi. Druhý typ šumu bude reprezentovat chybu měření a bude mít přímý vliv na měřené veličiny.

Stochastický model systému

PMSM tedy budeme dále uvažovat jako stochastický diskrétní systém popsaný rovnicemi

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= f(x_t, u_t) + w_t, \\ y_t &= h(x_t) + v_t, \end{aligned}$$

pro $t = 1, \ldots, T$, kde x_t je vektor stavu, u_t vektor řízení, y_t vektor pozorování (měření) a vektory v_t a w_t představují na sobě vzájemně nezávislý aditivní bílý Gaussovský šum s nulovou střední hodnotou a kovariančními maticemi R_t a Q_t v tomto pořadí. Funkce f představuje vývoj systému daný například rovnicemi (1.20), (1.22) nebo (1.23) a h je známou funkcí měření.

1.3 Bezsenzorový návrh PMSM

1.3.1 Mechanické veličiny a senzory

Jak je patrné z výše odvozeného modelu PMSM, když chceme stroj dobře řídit, je potřeba znát s dostatečnou přesností fyzikální veličiny, které zachycují jeho stav v daném časovém okamžiku. Jako tyto veličiny v základu volíme elektrické proudy a napětí a dále pak polohu rotoru a rychlost jeho otáčení. Získat dostatečně přesné hodnoty těchto veličin však není vždy zcela jednoduché.

U elektrických proudů na výstupu stroje předpokládáme, že je měříme s dostatečnou přesností. Elektrická napětí na vstupu předpokládáme známá, protože se obvykle jedná o řídící veličiny. Je však třeba poznamenat, že napětí požadovaná řídícím algoritmem a

skutečná napětí dodaná napájecí elektronikou se mohou často značně lišit. Vliv a řešení tohoto konkrétního problému bude podrobněji diskutován dále v textu, viz 4.1.2.

Získání hodnot mechanických veličin v reálném čase je v praxi mnohem komplikovanější. Je totiž třeba užít speciálních senzorů jako například: pulzní snímače na principu vhodného kódu [38], Hallovy senzory [30] nebo rezolvery [25, 38]. Pro praktické aplikace je však třeba ekonomických, robustních a kompaktních motorů a využití senzorů přináší obecně mnoho nevýhod jako například [39, 61]:

- větší hardwarová složitost zařízení, více vodičů, sběrnic a konektorů, větší rozměry
- vyšší cena, vliv na životní cyklus výrobku
- menší spolehlivost a menší odolnost proti šumu
- nutno řešit negativní vlivy na senzory: elektromagnetické pole, oscilace, vysoké rychlosti a teploty
- vyšší nároky na údržbu
- menší robustnost, problém při selhání senzoru, je-li motor současně využíván i jako brzda (detailněji [59])

Je tedy snahou se užití senzorů vyhnout a k určování polohy a otáček rotoru využít jiných, *bezsenzorových*, metod. Ty jsou obvykle založeny na speciálním algoritmu, který odhaduje hodnoty mechanických veličin z hodnot veličin elektrických.

S bezsenzorovými metodami byly na počátku spojeny problémy s výpočetní náročností. To se však změnilo s dostupností moderních výkoných elektronických prvků umožňujících implementaci náročnějších algoritmů a tím byl umožněn rozvoj bezsenzorového řízení. V posledních letech tak byl současně v akademické i průmyslové sféře odstartován intenzivní výzkum na poli pokročilých řídících strategií. Pro komerční průmyslovou aplikaci je však bezsenzorový návrh rozumný, jen pokud se neprodraží více než původně uvažované senzory. Nelze tedy bezsenzorový návrh příliš usnadnit přidáním dalších elektrických senzorů (například napěťových), užití nejvýkonnějších dostupných procesorů, případně požadavkem na jinou nebo speciální konstrukci samotného motoru [39].

1.3.2 Přehled metod pro odhadování stavových veličin PMSM

K odhadování stavových veličin PMSM v bezsenzorovém návrhu je možno přistupovat z různých směrů a lze při tom využít mnoha specifických jevů. V důsledku toho byla vyvinuta celá řada více či méně úspěšných metod. Následující přehled hlavních reprezentantů těchto metod čerpá svoji osnovu z [61], ta je doplněna z [26] a dále o konkrétní příklady z dalších zdrojů.

1.3.3 Metody založené na otevřené smyčce

Nejdříve budou uvedeny nejjednodušší metody odhadování stavových veličin založené na otevřené smyčce.

Přímý výpočet

Požadované veličiny (poloha a otáčky) jsou přímo vyjádřeny a vypočteny z rovnic popisujících PMSM. Jedná se o přímočarou a jednoduchou metodu s velmi rychlou dynamickou odezvou. Není třeba užití komplikovaného pozorovatele, nicméně metoda je velmi citlivá na chyby měření, šum a nepřesné určení parametrů stroje.

Výpočet statorové indukčnosti

Používá se pro IPMSM, kde indukčnost statorových fází je funkcí polohy rotoru. Poloha rotoru je tedy vypočtena z napětí a proudu ve statorové fázi. Problémy nastávají v důsledku nepřesného výpočtu indukčnosti a dále při saturaci magnetickým tokem, kdy metoda poskytuje špatné výsledky.

Integrace zpětné elektromotorické síly

Metoda využívá toho, že v synchronním stroji rotuje statorový a rotorový tok synchronně a tedy ze znalosti statorového toku lze vypočítat, na základě rovnic stroje, úhel rotorového toku, tedy polohu hřídele. Problém tohoto přístupu je především v citlivosti na šum a (především teplotní) změny rezistance statoru. Dále metoda funguje špatně při nízkých otáčkách.

Rozšířená elektromotorická síla

V tomto případě se jedná pouze o rozšíření konceptu zpětné elektromotorické síly na IPMSM, kde vystupují rozdílné indukčnosti. Stručně řečeno tedy umožňuje snadnou aplikaci metod vyvinutých pro SMPMSM založených na zpětné elektromotorické síle i pro IPMSM.

1.3.4 Metody s uzavřenou smyčkou

Předchozí metody založené na otevřené smyčce jsou limitovány především přesností, s jakou uvažované parametry v modelu odpovídají skutečným hodnotám stroje. Obzvláště při nízkých otáčkách se chyby parametrů mohou nepříznivě ovlivňovat dynamiku systému. Užitím pozorovatelů založených na uzavřené smyčce lze zvýšit robustnost proti nepřesnému určení parametrů, ale i proti šumu v systému obecně [26].

Rozšířený Kalmanův filtr

Tato metoda poskytuje ve srovnání s ostatními velmi dobré výsledky, je méně ovlivněna šumem měření a nepřesností parametrů. Je asi nejpoužívanějším nelineárním pozorovatelem pro odhadování stavových veličin PMSM. Popis jeho aplikace lze nalézt například v [7, 8, 9, 41]. Problematičtější je nutnost vhodné volby kovariančních matic. Dále je třeba vyřešit problém s konvergencí ke špatnému řešení (symetrie (ω, ϑ) a $(-\omega, \vartheta + \pi)$). Užití rozšířeného Kalmanova filtru je také komplikovanější pro IPMSM s různými indukčnostmi kvůli složitějšímu popisu. Dalšími nevýhodami jsou vyšší výpočetní a časová

náročnost. Detailnímu popisu algoritmu rozšířeného Kalmanova filtru a jeho následné aplikaci na PMSM bude věnována zvláštní pozornost dále v textu, viz odstavec 2.5.1 a část 3.2.

MRAS (Model Reference Adaptive System)

Algoritmus využívá redundance dvou různých modelů stroje k určení stejných veličin z jiné množiny vstupů. Chyba mezi estimovanými veličinami jednotlivých modelů je pak úměrná úhlovému posunu mezi dvěma odhadovanými vektory magnetického toku a tedy i úhlu natočení stroje. Tato chyba je pak obvykle minimalizována PI regulátorem. Příkladem je využití napěťového a proudového modelu k určení chyby magnetického toku, ze které je následně stanovena rychlost. Jinou možností je užít jako jeden z modelů samotný PMSM. Nevýhodou této metody je silná závislost na přesnosti parametrů stroje, obzvláště na rezistanci statoru.

Jednoduché adaptivní řízení

Návrh pro případ známé velikosti toku permanentních magnetů. Výhodou je zvládnutí kompenzace konstantního posun napětí, avšak má problémy při nízkých otáčkách.

Klouzavý pozorovatel (sliding mode observer)

Přístup zajišťuje nulovou chybu odhadovaného statorového proudu. Dále pak rekonstruuje zpětnou elektromotorickou sílu a vypočítává z ní polohu rotoru. Opět má problémy při nízkých otáčkách. Existuje i iterativní verze klouzavého pozorovatele, viz například [28].

1.3.5 Metody založené na neideálních vlastnostech motoru

Jejich výhodou je především odstranění kritické závislosti na velikosti zpětné elektromotorické síly úměrné otáčkám stroje. Tyto metody jsou tedy navrhovány se zamýšleným užitím především pro nízké a nulové otáčky.

Vysokofrekvenční (HF) injektáž

Metoda je založena na vlastnosti magnetických „výčnělků“ (saliency) především u IPMSM, případně na lokálních anizotropiích v důsledku saturace magnetickým tokem typickými pro SMPMSM. Detailněji se základní metodou injektáže zabývají v [6, 25, 27].

Injektovaný signál je přiváděn na vstup stroje spolu s řízením. Generuje točivé nebo střídavé pole ve specifickém, předem určeném prostorovém směru. Tyto dva rozdílné přístupy jsou také označovány jako „rotující napěťový vektor“ a „pulzující napěťový vektor“ v tomto pořadí. Jejich srovnání a aplikaci na oba typy PMSM (SM- a I-) lze nalézt v [5, 29].

Výhodou injektáží je necitlivost k nepřesné znalosti parametrů stroje. Například články [33, 34] představují injektážní metodu, která nepotřebuje znát parametry stroje. V případě [34] se navíc snaží kompenzovat i negativní vliv invertoru a rozšířit schopnost

detekce anizotropií i na velmi malé nepravidelnosti typické pro SMPMSM. Nevýhodou injektážních metod je spotřeba jistého množství napětí, což snižuje dostupné maximální napětí. Dalším nedostatkem je užití digitálních filtrů pro zpracování a špatný dynamický výkon v důsledku jejich užití.

Přiblížení základního principu funkce injektážních metod je uvedeno dále v textu v odstavci 1.3.8.

Injektáž velmi vysokých frekvencí

Tento relativně nový postup prezentovaný v [42] nedetekuje anizotropie v důsledku saturace případně anizotropie rotoru. Místo toho je založena na neideálních vlastnostech (anizotropiích) samotných permanentních magnetů. Z tohoto důvodu ji lze využít v případech kdy ostatní metody selhávají, například z důvodu nepřítomnosti klasických anizotropií. Pro správnou funkčnost metody je však nutné užití velmi vysokých frekvencí v řádu stovek *kHz*. Nevýhodou je nutnost volby optimální hodnoty frekvence specificky pro konkrétní typ magnetu. Dále pak to, že se jedná o relativně novou metodu, která zatím není detailněji prozkoumána.

Nízkofrekvenční (LF) injektáž

Nízkofrekvenční injektáž je založena na injektování nízké frekvence do d osy, to způsobí změnu v otáčkách indikující chybu odhadu a z ní je pak možné odhadnout polohu. Metoda je založeno na jiném principu než vysokofrekvenční injektáže a výstupky již nejsou nutnou podmínkou pro její funkčnost. Použitelnost tohoto přístupu závisí na momentu setrvačnosti stroje a pro jeho velké hodnoty selhává. Dalším nedostatkem pak je pomalá dynamická odezva.

INFORM (Indirect flux detection by on-line reactance measurement)

Jedná se o metodu použitelnou pro určení polohy PMSM při nízkých a nulových otáčkách. Je založena na měření proudové odezvy vyvolané přepínáním invertoru s pulzně-šířkovou modulací (PWM) a užitím těchto proudů k výpočtu polohy rotoru. Výhodou je jednoduchý výpočet a dále to, že není třeba rovnic pro motor a tedy je metoda necitlivá na změnu a nepřesné hodnoty parametrů. Oproti tomu je však citlivá na chyby toku, které způsobují špatný odhad. Další nevýhodou je rušení proudů v ustáleném stavu.

1.3.6 Detekce počáteční polohy

Pro hladký start PMSM je třeba znát počáteční polohu. Obvyklým postupem je užití vhodné excitace stroje k získání této informace. Hlavní užívané možnosti excitace jsou:

Užití impulzního napětí

Postup je založen na sycení a změně indukčnosti statoru s pozicí magnetů na rotoru. Za klidu stroje jsou do statorových fází aplikovány napěťové pulzy a z proudů je následně

vypočítána informace o poloze. Příkladem může být technika představená v [48], která nevyžaduje znalost parametrů stroje a je možno ji aplikovat i na SMPMSM.

Testovací napěťové vektory

Napěťové vektory v různých prostorových směrech jsou aplikovány do stroje a je měřena proudová odezva. Nejvyšší odezva pak indikuje pozici rotoru. Funkčnost metody je založena na saturaci statorového jádra.

Vysokofrekvenční (HF) testovací signál

Počáteční poloha je získávána z odezvy na injektovaný proudový nebo napěťový vysokofrekvenční signál. Jedná se o podobný přístup jako vysokofrekvenční injektáže.

1.3.7 Kombinace metod

Vzhledem k tomu, že každá z výše uvedených metod má své nedostatky, nejlepších výsledků je dosahováno jejich vhodnou kombinací. Kombinování metod však přináší nové problémy, které je třeba řešit. Obecně komplikuje celý návrh a ten se tak stává složitějším. Velkým problémem je nutnost navrhnout správné napojení a součinnost jednotlivých kombinovaných metod.

V [7] představují bezsenzorové řízení založené na EKF pozorovateli ve spojení s PI regulátory. To nepotřebuje znát počáteční natočení rotoru ani zátěžný moment. PI regulátor napětí lze nastavit se zamčeným rotorem a ve zmiňovaném zdroji je řešen i problém s rozpoznáním $\operatorname{sign}\omega$.

Článek [8] je také zaměřen na využití EKF, nyní však v případě IPMSM. Návrh je komplikovanější v důsledku uvažování anizotropií stroje, autoři se ji však snaží využít k vylepšení výkonu systému.

V [53] využívají řízení založené na klouzavém pozorovateli, kde si ale navíc při nízkých otáčkách $\omega \approx 0$ pomáhají injektováním stejnosměrného proudu do d osy. Nevyužívají však anizotropií ani nijak zvlášť neanalyzují injektovaný signál.

Hybridní metody s injektáží

Jako hybridní metody budou v textu označovány kombinace nejčastěji používaných přístupů pro PMSM, tedy injektáží a technik založených na zpětné elektromotorické síle. Užití injektáží je vhodné pro nízké a nulové otáčky, zatímco ve vyšších rychlostech způsobuje nežádoucí rušení. Oproti tomu přístupy využívající zpětnou elektromotorickou sílu fungují pří vyšších otáčkách dobře a pro nízké selhávají. Je tedy nasnadě oba typy metod vhodným způsobem zkombinovat a získat tak způsob jak odhadovat stavové veličiny v celém rozsahu rychlostí stroje. Základní idea tedy je pří nízkých otáčkách využívat odhadů z injektáží a při zvýšení otáček injektáže vypnout, aby nezpůsobovali rušení a dále se řídit jen na základě odhadů ze zpětné elektromotorické síly. Tento postup je použit v [44], kdy jako estimátor používají adaptivního pozorovatele s referenčním modelem, který je pro nízké otáčky doplněn základním návrhem injektáže.

Důležitou součástí těchto metod je způsob, jakým se vyřeší „bezproblémový“ přechod z jednoho estimátoru na jiný. V [51] je to například řešeno tak, že stále užívají estimátor rotorového toku založený na indukovaných napětích. V nízkých otáčkách je pak doplňován injektáží, ta s rostoucími otáčkami postupně vymizí. Obdobně v [43] je užit estimátor založený na napěťovém modelu, v nízkých otáčkách je přidána vysokofrekvenční injektáž. Amplituda injektáže s rostoucími otáčkami lineárně klesá a navíc je nad určitou mezní rychlostí úplně vypnuta.

Hybridní metody jsou samozřejmě dále vylepšovány. Například v [45] uzpůsobují standardní hybridní metodu, zejména její injektážní část, aby fungovala i s invertorem vybaveným na výstupu LC filtrem. Toho se užívá zejména k odstranění problému ve střídavých strojích v důsledku napájení nesinusovým napětím z invertoru s pulzně šířkovou modulací.

Užití více modelů

Poměrně dobrých výsledků je také dosahováno při použití metod užívajících více současně běžících modelů. Z těchto modelů je pak nějakým způsobem vybrán nejlepší, případně je z nich přímo počítán odhad stavových veličin. Nevýhody tohoto přístupu jsou zřejmé, především se jedná o velkou výpočetní náročnost způsobenou právě současným během více modelů. Příkladem může být sekvenční metoda Monte Carlo označovaná také jako Particle Filter. [56]

1.3.8 Přiblížení metody vysokofrekvenční injektáží

V tomto odstavci bude přiblížen základní princip fungování vysokofrekvenčních injektáží pro PMSM s různými indukčnostmi L_d a L_q. Popis je založeno na [24, 35]. Uvažována bude injektáž označovaná jako *pulzující napěťový vektor*, kdy je injektáž prováděna v rotorové souřadné soustavě $d-q$. Konkrétně je do estimované osy d je injektovaný harmonický signál

$$u_d^{inj} = A_{inj} \cos\left(\omega_{inj} t\right),$$

kde A_{inj} je amplituda injektovaného signálu a ω_{inj} pak jeho frekvence. Odezva je získávána z proudu v estimované ose q.

Vyjdeme z prvních dvou rovnic ze soustavy rovnic (1.18) a dále aplikujeme následující předpoklady [35]:

1. frekvence injektovaného signálu je dostatečně velká oproti uvažované frekvenci otáčení stroje $\omega_{inj} \gg \omega$
2. otáčky jsou dostatečně nízké, aby byla zanedbatelná zpětná elektromotorická síla a poklesy napětí v důsledku rezistance obvodu
3. uvažujeme pouze jednoduchou anizotropii, zde reprezentovanou rozdílnými indukčnostmi $L_d \neq L_q$

Na základě těchto předpokladů je možno vyloučit interakci vysokofrekvenčního signálu s „mechanickou“ částí stroje a zjednodušit původní rovnice na vysokofrekvenční model stroje ve tvaru

$$\begin{aligned} \frac{di_d}{dt} &= \frac{1}{L_d} u_d, \\ \frac{di_q}{dt} &= \frac{1}{L_q} u_q. \end{aligned} \tag{1.24}$$

Dále zaveďme označení, kdy ϑ reprezentuje skutečný úhel natočení rotoru, $\hat{\vartheta}$ jeho odhad a veličina θ představuje chybu tohoto odhadu $\theta = \vartheta - \hat{\vartheta}$. Průběh injektáže je pak následující:

Nejdříve je injektovaný vysokofrekvenční signál do estimované osy d (označíme jako $\hat{d}$)

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{\hat{d}} &= u_{\hat{d}} + A_{inj} \cos\left(\omega_{inj} t\right), \\ \tilde{u}_{\hat{q}} &= u_{\hat{q}}, \end{aligned}$$

kde u značí řídící zásah navržený regulátorem, tedy bez injektáže, a $\tilde{u}$ řídící zásah s injektáží. Následně provedeme transformaci z estimovaného rotorového $d-q$ do (skutečného) statorového $\alpha - \beta$ souřadného systému pomocí vztahu (1.2), tedy rotaci o $\hat{\vartheta}$:

$$\begin{aligned} \tilde{u}_\alpha &= u_\alpha + A_{inj} \cos\left(\omega_{inj} t\right) \cos\hat{\vartheta}, \\ \tilde{u}_\beta &= u_\beta + A_{inj} \cos\left(\omega_{inj} t\right) \sin\hat{\vartheta}, \end{aligned}$$

kde $u_{\alpha\beta}$ představují zjednodušené označení pro transformované původní řídící zásahy $u_{\hat{d}\hat{q}}$.

Řídící zásahy $\tilde{u}_{\alpha\beta}$ jsou použity ve stroji, ten je reprezentován rovnicemi vysokofrekvenčního modelu (1.24) v souřadné soustavě $d-q$ a proto provedeme transformaci (1.1), nyní ale se skutečnou hodnotou ϑ, protože uvažujeme, že ta je samotnému stroji (případně jeho simulátoru) známa, výsledkem jsou řídící zásahy

$$\begin{aligned} \tilde{u}_d &= u_d + A_{inj} \cos\left(\omega_{inj} t\right) \cos\hat{\vartheta} \cos\vartheta + A_{inj} \cos\left(\omega_{inj} t\right) \sin\hat{\vartheta} \sin\vartheta, \\ \tilde{u}_q &= u_q - A_{inj} \cos\left(\omega_{inj} t\right) \cos\hat{\vartheta} \sin\vartheta + A_{inj} \cos\left(\omega_{inj} t\right) \sin\hat{\vartheta} \cos\vartheta, \end{aligned}$$

kde opět u_{dq} značí řídící zásah navržený regulátorem, tedy bez injektáže, a $\tilde{u}_{dq}$ řídící zásah s injektáží, nyní však ve skutečné souřadné soustavě $d-q$ a nikoliv v estimované. Transformované řízení $\tilde{u}_{dq}$ nyní aplikujeme ve vysokofrekvenčním modelu (1.24) a vypočteme proudy i_{dq}, kdy se v podstatě jedná o integraci. Dále provedeme zjednodušení výsledných vztahů pomocí základních goniometrických vzorců a užijeme označení $\theta = \vartheta - \hat{\vartheta}$:

$$\begin{aligned} \tilde{i}_d &= i_d + \frac{A_{inj}}{L_d \omega_{inj}} \sin\left(\omega_{inj} t\right) \cos\theta, \\ \tilde{i}_q &= i_q - \frac{A_{inj}}{L_q \omega_{inj}} \sin\left(\omega_{inj} t\right) \sin\theta, \end{aligned}$$

kde $\tilde{i}_{dq}$ představuje proudy na výstupu a pod označení i_{dq} byly zahrnuty zbývající členy z integrace, tedy integrace napětí u_{dq} a případné integrační konstanty.

Návrh systému předpokládá měření proudů ve statorových souřadnicích a tedy je nutné provést transformaci (1.2) do souřadného systému $\alpha - \beta$:

$$\begin{aligned}
\tilde{i}_\alpha &= i_\alpha + \frac{A_{inj}}{\omega_{inj}} \sin(\omega_{inj} t) \left(\frac{\cos\theta \cos\vartheta}{L_d} + \frac{\sin\theta \sin\vartheta}{L_q} \right), \\
\tilde{i}_\beta &= i_\beta + \frac{A_{inj}}{\omega_{inj}} \sin(\omega_{inj} t) \left(\frac{\cos\theta \sin\vartheta}{L_d} - \frac{\sin\theta \cos\vartheta}{L_q} \right),
\end{aligned}$$

kde jako $i_{\alpha\beta}$ označíme transformované proudy i_{dq}. Dále je ještě třeba převést proudy pomocí transformace (1.1) do estimované rotorové souřadné soustavy $d - q$, ve které probíhá vyhodnocení

$$\begin{aligned}
\tilde{i}_{\hat{d}} &= i_{\hat{d}} + \frac{A_{inj}}{\omega_{inj}} \sin(\omega_{inj} t) \left(\frac{\cos^2\theta}{L_d} + \frac{\sin^2\theta}{L_q} \right), \\
\tilde{i}_{\hat{q}} &= i_{\hat{q}} + \frac{A_{inj}}{\omega_{inj}} \sin(\omega_{inj} t) \left(\frac{\sin\theta \cos\theta}{L_d} - \frac{\sin\theta \cos\theta}{L_q} \right).
\end{aligned}$$

Nyní je třeba vhodně získat modulovaný vysokofrekvenční signál na frekvenci ω_{inj} z proudu v estimované q ose, tento signál označíme i_q^{inj} a jeho hodnota v čase je

$$i_q^{inj} = \frac{A_{inj}}{\omega_{inj}} \sin(\omega_{inj} t) \sin\theta \cos\theta \left(\frac{1}{L_d} - \frac{1}{L_q} \right),$$

tedy na nosném vysokofrekvenčním signálu $\sin(\omega_{inj} t)$ je modulována hodnota

$$\frac{A_{inj}(L_q - L_d)}{2\omega_{inj} L_d L_q} \sin 2\theta.$$

Izolovat přímo vysokofrekvenční signál však není snadné a proto se používá následující postup: Proud v estimované ose q násobíme vysokofrekvenčním signálem na frekvenci ω_{inj} s vhodným časovým posunem. Ilustrujme to na funkci $\sin(\omega_{inj} t)$, kdy získáme

$$\tilde{i}_{\hat{q}} \sin(\omega_{inj} t) = i_{\hat{q}} \sin(\omega_{inj} t) + \frac{A_{inj}(L_q - L_d)}{2\omega_{inj} L_d L_q} \sin 2\theta \sin^2(\omega_{inj} t). \tag{1.25}$$

Na tento signál následně aplikujeme low-pass filtr a získáme hodnotu

$$\frac{A_{inj}(L_q - L_d)}{4\omega_{inj} L_d L_q} \sin 2\theta. \tag{1.26}$$

Důvodem pro tento výsledek je fakt, že low-pass filtr odstraňuje ze signálu vysoké frekvence a ponechává nízké. Uvažujme jeho krajní případ, tedy filtr, který ponechá v nějakém časovém horizontu pouze nejnižší frekvenci odpovídající střední hodnotě signálu a vypočtěme střední hodnotu signálu (1.25) přes jednu periodu. Vzhledem k frekvenci

signálu ω_{inj} je periodou například interval $\left\langle 0, \frac{2\pi}{\omega_{inj}} \right\rangle$, dále předpokládejme, že tato perioda je dostatečně krátká, abychom v jejím průběhu mohli považovat funkce $i_{\hat{q}}$ a θ za konstantní v čase. Střední hodnota signálu (1.25) přes periodu pak je

$$\begin{aligned}
\frac{\omega_{inj}}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega_{inj}}} \tilde{i}_{\hat{q}} \sin(\omega_{inj} t)\, dt &= i_{\hat{q}} \frac{\omega_{inj}}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega_{inj}}} \sin(\omega_{inj} t)\, dt + \\
&+ \frac{A_{inj}(L_q - L_d)}{2\omega_{inj} L_d L_q} \sin 2\theta \frac{\omega_{inj}}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega_{inj}}} \sin^2(\omega_{inj} t)\, dt \\
&= 0 \cdot i_{\hat{q}} + \frac{\omega_{inj}}{2\pi} \cdot \frac{\pi}{\omega_{inj}} \cdot \frac{A_{inj}(L_q - L_d)}{2\omega_{inj} L_d L_q} \sin 2\theta \\
&= \frac{A_{inj}(L_q - L_d)}{4\omega_{inj} L_d L_q} \sin 2\theta.
\end{aligned}$$

Výsledek (1.26) lze nalézt například v [5, 27, 43, 45]. Následně lze hodnoty (1.26) použít k získání lepšího odhadu polohy $\hat{\vartheta}$. Není však příliš vhodném získávat odhad ϑ z (1.26) přímým výpočtem, protože takovýto výsledek by byl velmi nepřesný. Je tomu tak proto, že samotná hodnota (1.26) je relativně nepřesná v důsledku demodulace a dále může být značně zatížena šumem. Výhodnější proto je použít vhodný zpětnovazební regulátor, například PI, a regulovat hodnotu (1.26) úměrnou chybě odhadu $\vartheta - \hat{\vartheta}$ na nulu.

Dále je třeba upozornit na nedostatky injektážní metody, které plynou ze zápisu (1.26). Především je zřejmá nezbytnost předpokladu $L_d \neq L_q$, protože v případě rovnosti je hodnota (1.26) zřejmě rovna nule. Dalším problémem je, že v (1.26) nevystupuje přímo hodnota θ, ale hodnota $\sin 2\theta$ a vztah je tedy nelineární. Budeme-li chtít využít lineární zpětnovazební regulátor pro regulaci θ na nulu, lze jej použít pouze pro malé výchylky θ, kdy dostatečně přesně platí aproximace $\sin x \approx x$. I v případě, že tento problém vyřešíme, metoda bude stále fungovat pouze pro odchylky θ v omezeném intervalu $\theta \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$ v důsledku kratší periody funkce $\sin 2x$.

1.4 Metody řízení

Tato část bude věnována základním postupům užívaným pro řízení synchronních strojů. V případě zpětnovazebních strategií je nutno regulátoru poskytnout informace o stavu. Tato informace je v senzorovém návrhu získávána pomocí čidla, pro bezsenzorový návrh je třeba užít některý z přístupů zmiňovaných v předchozí části.

1.4.1 Požadavky na řízení

Cílem řízení systému je obvykle dosažení optimální shody se zadanými požadavky. Ty jsou většinou reprezentovány referenčním signálem, který dostává regulátor na svůj vstup spolu s hodnotami pozorování systému. Pro mnoho regulátorů je obvyklé uvažovat jako referenční hodnotu nulu, příkladem může být PI regulátor nebo standardní lineárně kvadratický regulátor. Požadavek řízení na nenulové hodnoty je pak třeba vhodně ošetřit.

Příklad takového postupu představuje úprava lineárně kvadratického řízení pro PMSM v části 3.4.

Nejen pro PMSM ale pro motory obecně představuje obvykle referenční signál požadavek na otáčky. Další možností je požadovaný moment nebo případně požadovaná poloha u servomotorů. Přičemž posledně jmenovaná možnost řízení polohy zatím zřejmě není příliš vhodná ve spojení s bezsenzorovým PMSM kvůli problematice určování polohy v nízkých a nulových otáčkách.

1.4.2 Skalární řízení

Skalární řízení je často využíváno v asynchronních strojích, je však možné užít jej i pro PMSM. Detailněji je popsáno například v [58]. Jeho velkou výhodou je, že se jedná v podstatě o bezsenzorový návrh řízení, protože funguje na principu nezpětnovazebního řízení. Nevýhodou je pak závislost rychlosti na zátěžném momentu, horší dynamické vlastnosti a špatná regulace momentu. I přes zmíněné nevýhody toto řízení obvykle stačí na jednodušší aplikace jako pohon větráků, čerpadel nebo klimatizací [39].

Toto řízení je také označováno jako V/f nebo volt/hertz řízení, protože regulovanou veličinou je právě poměr napětí a frekvence. Snahou řízení je udržet poměr napětí a frekvence konstantní. Úhlová rychlost rotoru může být určena nepřímo výpočtem z frekvence napájecího napětí. Tato hodnota může být považována za hodnotu skutečných otáček stroje, pokud zátěžný moment nepřesáhne kritickou hodnotu. Pro řízení ale skutečnou hodnotu otáček stroje znát nepotřebujeme, algoritmus totiž pracuje ve stručnosti následovně:

Z požadovaných otáček se určí frekvence f, ta slouží jako referenční signál pro regulátor. Ten pak řídí poměr napětí a frekvence V/f tak, aby byl konstantní. Na jeho výstupu získáme amplitudu napětí V. Řídící napětí pro PMSM v $\alpha - \beta$ souřadnicích je pak ve tvaru

$$\begin{aligned} u_\alpha &= V\cos(2\pi f t), \\ u_\beta &= V\sin(2\pi f t). \end{aligned}$$

1.4.3 Přímé řízení momentu

Přímé řízení momentu (Direct Torque Control, DTC) se užívá, když je potřeba vysoký výkon vzhledem k dynamice momentu. Je řízen přímo moment stroje a základní princip je následující: Kruhová trajektorie statorového toku se rozdělí na šest symetrických částí. Velikosti vektorů statorového toku a elektromagnetického momentu v souřadnicích $\alpha-\beta$ je pak držena v předem stanovených mezích prostřednictvím vhodného spínání přímo jedné ze šesti kombinací na invertoru. [58, 40]

Touto metodou text již dále nezabývá a je zde uvedena jen pro úplnost.

1.4.4 Vektorové řízení

Jedná se asi o velmi často využívaný řídící algoritmus. Je aplikován pro řízení v kombinaci s estimátorem založeným na zpětné elektromotorické síle, injektáži i v hybridních verzích

v mnoha publikovaných textech jako [8, 11, 12, 27, 37, 41, 43, 45, 50].

Dle [58] vektorové řízení odstraňuje většinu nevýhod skalárního řízení a v porovnání s ním poskytuje velmi dobrý výkon. Jedná se o řízení zpětnovazební a umožňuje samostatné řízení toku i momentu, potřebuje však znát odhady stavových veličin stroje včetně mechanických.

Vektorové řízení je obvykle implementováno na základě vhodné kombinace PI regulátorů. Jinou možnost nabízí využít lineárně kvadratického regulátoru, který umožní daleko větší variabilitu návrhu. Jeho implementace v praxi je však komplikovaná z důvodu znatelně větší výpočetní náročnosti. Užití lineárně kvadratického regulátoru pro řízení PMSM není zatím v literatuře příliš zmiňováno, výjimkou je [36], kde ovšem neuvažují bezsenzorový návrh.

V následujícím odstavci bude popsán PI regulátor a na něm založená implementace vektorového řízení. Popisu lineárně kvadratického přístupu bude věnována samostatná část v následující kapitole v části 2.5.2 a jeho aplikace na PMSM pak bude uvedena dále v části 3.4.

PI regulátor

PI (proporcionálně integrační) regulátor je jednoduchý systém, který v sobě kombinuje dvě základní části: Proporcionální část, což je ve své podstatě zesilovač a integrální část reprezentovanou integrátorem. V tomto systému se vyskytují dvě konstanty K_p a K_i, které je třeba vhodně nastavit. Základní implementace je následovná:

$$x_t = \mathrm{PI}\left(e_t, K_p, K_i\right) = K_p e_t + K_i \int_0^t e_\tau d\tau.$$

A v diskrétní verzi pak

$$x_t = \mathrm{PI}\left(e_t, K_p, K_i\right) = K_p e_t + K_i \sum_{k=0}^{t} e_k.$$

Tento regulátor je výhodné užít v případě, kdy chceme vyregulovat e_k, obvykle reprezentující odchylku od požadované hodnoty, na nulu. V některých případech bychom si vystačili s proporcionální složkou, integrální složka však dodává lepší stabilitu a schopnost odstranit konstantní regulační odchylku. Cenou za to je pomalejší konvergence [1].

Vektorové PI řízení

Vektorové PI řízení je implementováno na základě popisu v [41, 58]. Uvažujeme reprezentaci stroje v $d-q$ souřadném systému. Vektorové řízení je zpětnovazební a je tedy potřeba znát odhady úhlu natočení $\hat{\vartheta}$ a otáček $\hat{\omega}$ rotoru stroje. Základní struktura regulátoru pak využije zpětné vazby z otáček, kdy první regulátor reguluje odchylku estimovaných otáček $\hat{\omega}$ od požadované referenční hodnoty $\overline{\omega}$ na nulu. Výstupem je pak referenční proud

$\overline{i_q}$. Referenční proud $\overline{i_d}$ volíme nulový, aby bylo dosaženo maximálního momentu. Tento postup bude ilustrován na diskretizované rovnici pro otáčky ze soustavy (1.22)

$$\omega_{t+1}{=}d\omega_t + ei_{q,t},$$

přičemž zanedbáváme poslední člen se zátěžným momentem. Požadované hodnoty bychom chtěli dosáhnout v následujícím kroku a tedy získáme rovnici

$$\overline{\omega} - d\omega = ei_q.$$

$\overline{i_q}$ pak můžeme získat pomocí PI regulátoru s vhodnými konstantami

$$\overline{i_q} = \mathrm{PI}(\overline{\omega} - \omega, K_{p,i}, K_{i,i}).$$

Referenční hodnoty proudů jsou následně porovnány s estimovanými hodnotami i_d a i_q a jejich odchylky jsou regulovány na nulu. Toto je provedeno pro každou složku zvlášť a výstupem jsou řídící napětí v souřadnicích $d-q$, tedy u_d a u_q. Postupujeme obdobně s rovnicemi proudů ze soustavy (1.22)

$$\begin{aligned} i_{d,t+1} &= ai_{d,t} + \Delta t \cdot i_{q,t}\omega_t + cu_{d,t}, \\ i_{q,t+1} &= ai_{q,t} - \Delta t \cdot i_{d,t}\omega_t - b\omega_t + cu_{q,t}, \end{aligned}$$

kde prozatím zanedbáme členy s $\pm\Delta t \cdot i_{q,d}\omega$, dále pak člen $-b\omega_t$ a chceme dosáhnout požadovaných hodnot $\overline{i_d} = 0$ a $\overline{i_q}$, které byly získány v předchozím kroku. To vede na následující tvar

$$\begin{aligned} -ai_d &= cu_d, \\ \overline{i_q} - ai_q &= cu_q. \end{aligned}$$

Napětí u_d a u_q můžeme opět získat pomocí PI regulátorů ve tvaru

$$\begin{aligned} u_d &= \mathrm{PI}(-i_d, K_{p,u}, K_{i,u}), \\ u_q &= \mathrm{PI}(\overline{i_q} - i_q, K_{p,u}, K_{i,u}). \end{aligned}$$

Následně je ještě vhodné provést korekce v důsledku zanedbaných členů a to ve tvaru

$$\begin{aligned} u_d &= u_d - L_s\overline{i_q}\overline{\omega}, \\ u_q &= u_q + \psi_{pm}\overline{\omega}. \end{aligned}$$

Konkrétní implementace použitá v simulacích v kapitole 4 vychází z [41].

2 Teorie řízení

Kapitola se zabývá teoretickým pohledem na problematiku řízení. Velká pozornost je zde věnována pojmu duální řízení. Tato koncepce zde bude jednak obecně popsána, ale budou uvedeny i konkrétní případy jak ji řešit. Důraz přitom bude kladen především na jednoduché suboptimální algoritmy, které jsou dostatečně jednoduché, aby byla, alespoň teoreticky, možná jejich aplikace v reálném čase.

Dále budou uvedeny aposteriorní Cramer-Raovy meze jako nástroj využitelnému k porovnání jednotlivých algoritmů, především z pohledu, jak dobře dokáží zlepšit pozorovatelnost systému. Tato kapitola však bude obsahovat i popis klasických technik pro řízení a odhadování, které jsou často užívány v této práci. Jedná se o algoritmus rozšířeného Kalmanova filtru a lineárně kvadratický regulátor.

2.1 Rozdělení řídících algoritmů

Algoritmy užívané pro řízení systémů obecně, tedy nejen PMSM, lze rozdělit na základě jejich charakteristických vlastností do několika skupin. Toto rozdělení je obzvláště výhodné při práci se suboptimálními metodami. Rozčlenění je provedeno na základě dostupnosti pozorování (měření) stavu systému pro návrh řídícího zásahu a vychází z [3]:

Řídicí strategie založené na otevřené smyčce

V otevřené smyčce (open-loop) předpokládáme, že není dostupné žádné měření stavu systému. Řídící zásah je tedy navrhován pouze na základě znalosti struktury systému a stanovených požadavků, například ve formě referenčního signálu. Vzhledem k tomu, že tento přístup pouze navrhuje řídící zásahy a již nijak nevyhodnocuje jejich skutečný dopad, výsledky často nejsou dostačující pro náročnější aplikace. Příkladem užití může být skalární volt/hertz řízení pro PMSM, viz odstavec 1.4.2.

Zpětnovazební řídící strategie

Oproti předchozí kategorii je zde zavedena zpětná vazba (feedback), která v každém časovém kroku t poskytuje měření y_t. Dostupná znalost o systému v čase t jsou tedy, kromě jeho struktury, všechna měření $y_1, \ldots, y_t$ až do času t. Dále však již nepředpokládáme žádnou znalost o budoucích měřeních. Tento přístup je také označován jako pasivně adaptivní, protože regulátor se „učí“ na základě měření, ale nijak tomuto učení aktivně nepomáhá. Tedy informace, které se o systému dozví, získává v jistém smyslu náhodou a ne záměrně. Příklad tohoto přístupu představují klasické techniky pro řízení

PMSM jako vektorové řízení založené na PI nebo LQ regulátorech ve spojení s nějakým běžným estimátorem založeným na zpětné elektromotorické síle, například EKF.

Řídící strategie založená na uzavřené smyčce

Nejdříve je třeba poznamenat, že jak uvádějí autoři [3], není často v literatuře zdůrazňován a rozlišován rozdíl mezi strategií založené na uzavřené smyčce (closed-loop) a zpětnovazební strategií (feedback). Řídící strategie pracující v uzavřené smyčce uvažuje všechna budoucí pozorování a tedy využívá znalosti, že smyčka zůstane uzavřena až do konce uvažovaného časového horizontu. Tuto znalost se snaží zužitkovat, především v tom smyslu, že současný řídící zásah může ovlivnit nejistotu týkající se budoucích stavů, to je také nazýváno jako *duální efekt*. V tomto případě může vhodný řídící zásah „pomoci" učení (odhadování) tím, že snižuje nejistotu budoucích stavů a přístup pak lze označit za aktivně adaptivní. Právě této problematice se detailněji věnují následující části zabývající se duálním řízením.

2.2 Teorie duálního řízení

Duální řízení je obvykle využíváno v systémech s neurčitostí, představovanou například neznámými parametry, nepozorovatelnými stavovými veličinami nebo samotnou strukturou systému. Snahou je tuto neurčitost snížit a poskytnout řízení srovnatelné kvality, jako v případě stejného systému bez neurčitosti.

Charakteristickým rysem duálního řízení je, že obsahuje dvě hlavní části: „*opatrnou*" a „*budící*". *Opatrná* část, má za cíl pokud možno co nejlépe kontrolovat systém a snažit se dosáhnout optimální shody s požadavky. Oproti tomu *budící* část hledá optimální budící signál, který pomáhá co nejlépe určit neznámé veličiny systému. Tyto části jdou však proti sobě a cílem duálního řízení je nalézt mezi nimi vhodný kompromis.

2.2.1 Úloha optimálního řízení

Nejdříve bude stručně popsána obecná úloha optimálního řízení a postup jak nalézt její řešení.

Formulace úlohy

Základní formulace problému optimálního řízení pro časově diskrétní obecně nelineární systém dle [19] je:

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= f_t\left(x_t, p_t, u_t, \xi_t\right), \quad t = 0, 1, \ldots, T-1, \\ p_{t+1} &= \upsilon_t\left(p_t, \varepsilon_t\right), \\ y_t &= h_t\left(x_t, \eta_t\right), \end{aligned}$$

kde x_t je vektor stavu, p_t vektor neznámých parametrů, u_t vektor řídících vstupů, y_t vektor výstupů systému, vektory ξ_t, ε_t a η_t představují nezávislý náhodný bílý šum s

nulovou střední hodnotou a známým rozptylem, vše je uvažováno v čase t a f_t, υ_t a h_t jsou známé vektorové funkce. Počáteční hodnoty x_0 a p_0 předpokládáme také známé. Množinu výstupů a vstupů systému dostupných v čase t označujeme jako *informační vektor* $I_t = \{y_t, \ldots, y_0, u_{t-1}, \ldots, u_0\}$, kde $t = 1, \ldots, T-1$ a $I_0 = \{y_0\}$.

Dále uvažujeme, že požadavky na systém jsou zadány v podobě aditivní ztrátové funkce ve tvaru

$$J = \mathbf{E}\left\{\sum_{t=0}^{T-1} g_{t+1}\left(x_{t+1}, u_t\right)\right\}, \tag{2.1}$$

kde g_{t+1} jsou známe kladné konvexní skalární funkce. Střední hodnota $\mathbf{E}$ je počítána vzhledem k všem náhodným veličinám (x_0, p_0, ξ_t, ε_t a η_t, kde $t = 0, 1, \ldots, T-1$).

Obecné řešení

Problémem optimálního řízení je nalezení takové řídící strategie $u_t = u_t(I_t)$ ze známé množiny přípustných hodnot řízení U_t, která minimalizuje ztrátovou funkci J danou rovnicí (2.1).

Optimální řešení tohoto problému může být nalezeno rekurzivně užitím dynamického programování, kdy je v čase zpět prováděna následující minimalizace zapsaná pomocí rovnic

$$\begin{aligned} V_{T-1}\left(I_{T-1}\right) &= \min_{u_{T-1} \in U_{T-1}} \mathbf{E}\left\{g_T\left(x_T, u_{T-1}\right) \mid I_{T-1}\right\}, \\ V_t\left(I_t\right) &= \min_{u_t \in U_t} \mathbf{E}\left\{g_{t+1}\left(x_{t+1}, u_t\right) + V_{t+1}\left(I_{t+1}\right) \mid I_t\right\}, \end{aligned}$$

pro $t = T-2, T-3, \ldots, 0$. Funkce V vystupující v předchozích rovnicích je nazývána *Bellmanova* funkce.

Výše popsaný postup představuje zdánlivě jednoduchý způsob, jak nalézt řešení úlohy optimálního řízení. Skutečné provedení tohoto výpočtu však naráží na celou řadu praktických komplikací, které tuto úlohu obecně neřešitelnou analyticky i numericky. Hlavními komplikacemi jsou jednak výpočet střední hodnoty a minimalizace, ale hlavně problémy spojené s funkcí V. Bellmanova funkce V totiž závisí na informačním vektoru, který zahrnuje všechny předchozí interakce se systémem (pozorování a řízení) a proto je funkcí obecně značně velkého počtu proměnných. Tuto funkci je navíc třeba uchovávat mezi jednotlivými časovými kroky v její plné reprezentaci jako funkce, ne pouze její hodnotu ve vybraném bodě. [2, 4, 19]

2.2.2 Duální řízení

Řešení úlohy optimálního řízení je známo jen v několika málo speciálních případech a jinak je třeba spoléhat na užití vhodných aproximací a suboptimálních algoritmů. Přitom je však třeba zachovat některé důležité vlastnosti původního optimálního postupu.

A. Feldbaum zavedl ve svých raných pracích z 60. let minulého století pojem *duálního efektu*, tedy vlastnosti, kdy řídící zásah ovlivňuje nejen stav systému, ale také neurčitost tohoto stavu. Dále postuloval dvě hlavní vlastnosti, které by optimální řízení, a tedy i

jeho případná aproximace, mělo mít: 1) opatrně řídí systém, tak aby splnil referenční požadavky a 2) budí (excituje) systém za účelem snížení jeho neurčitost a zlepšení kvality řízení v budoucnu. Důležité je tedy aktivní získávání informace a z tohoto důvodu se musí jednat o algoritmus založený na uzavřené smyčce (closed-loop).

Jak již bylo předznamenáno v předchozí části 2.1, většina klasických metod pro řízení a estimaci obecně spadá do kategorie zpětnovazebních strategií (feedback) a tedy trpí nedostatky, které se snaží duální řízení odstranit. Jedná se o oddělení řídící a estimační části, které následně pracují nezávisle, i když obecně tyto dvě části nezávislé nejsou a navzájem se ovlivňují.

Dalším nedostatkem je předpoklad, že odhad poskytnutý estimátorem se rovná skutečné hodnotě stavové veličiny. Tento přístup je označován jako *Certainty Equivalence* (CE). Oproti tomu duální řízení obvykle předpokládá stavové veličiny jako náhodné veličiny a uchovává si o nich statistickou informaci. Příkladem může být, že odhad z estimátoru uvažujeme ve tvaru střední hodnoty a variance dané veličiny a předpokládáme, že skutečná hodnota pochází například z normálního rozdělení s těmito parametry. Z tohoto pohledu přístup CE předpokládá, že skutečná hodnota je rovna střední hodnotě. Duální řízení na rozdíl od postupů založených na CE principu uvažuje kromě odhadu stavové veličiny i to, jak je tento odhad přesný a tomu také přizpůsobuje řídící zákroky.

Je-li použito pouze opatrné řízení pro stochastický systému s neurčitostí, lze jeho chování obvykle označit jako „opatrné“, tedy takové, aby nedošlo ke zvyšování dopadu neurčitostí na celkovou ztrátu. Oproti tomu řízení využívající duálního efektu může být méně opatrné a přidat budící signál, aby snížilo neurčitost v budoucnu a tím celkově vylepšilo své výsledky. [2, 3, 19]

2.2.3 Hyperstav

V případě deterministického systému jsou všechny potřebné informace zachyceny v jeho stavu x_t, protože spolu s následujícími řídícími akcemi plně určují jeho budoucí vývoj. Ve stochastickém případě je však třeba uvažovat všechna předchozí pozorování a řídící zásahy, tedy informační vektor I_t. Nutnost pracovat s celým vektorem, jehož velikost roste v čase, je však značným problémem pro nalezení optimálního řízení takového systému. Snahou jak tento problém řešit je nalezení popisu označovaného jako *dostatečná statistika*, která zachycuje všechny podstatné informace obsažené v I_t, ale současně původní informační vektor redukuje a má tedy menší dimenzi.

Důležitým příkladem dostatečné statistiky je podmíněné rozdělení pravděpodobnosti stavu x_t za podmínky informačního vektoru I_t. V případě, že je toto rozdělení normální, stačí k jeho popisu první dva momenty, tedy vektor střední hodnoty a kovarianční matice. [2, 4]

Jedním z příkladů využití konceptu hyperstavu je algoritmus předložený v [31]: Jako výchozí zde slouží klasicky definovaný stavu systému x_t v čase t. Dále je užíváno EKF jako estimátoru, který v každém čase poskytne odhad stavu $\hat{x}_t$, ale kromě tohoto odhadu poskytuje i odhad kovariance stavu reprezentovaný maticí P_t, detailněji viz odstavec 2.5.1. Nyní je definován vektor *hyperstavu* v čase t jako původní stav x_t, ke kterému jsou navíc přidány prvky matice P_t. Z důvodu symetrie není třeba přidávat celou matici P_t,

ale stačí jen její horní nebo dolní trojúhelník.

Na systém popsaný hyperstavem lze již aplikovat nějaký klasický algoritmus, například LQG. V tom případě je pak algoritmus EKF na systém použit dvakrát. Poprvé formálně na původní stav a následně na hyperstav. Výhodou tohoto přístupu je, že kromě odhadu samotných stavových veličin, jsou k dispozici i odhady jejich kovariancí a je možno s nimi pracovat při návrhu řízení. Hlavními nevýhodami jsou růst velikost hyperstavu (obecně kvadraticky s velikostí původního stavu) a dále komplikace při výpočtu derivací rovnic EKF na stavu.

2.3 Metody pro duální řízení

Suboptimální metody, které sice nenaleznou optimální řešení, ale snaží se zachovat hlavní duální rysy, lze rozdělit do dvou hlavních skupin: metody založené na aproximacích (implicitní) a založené na reformulaci problému (explicitní).

Aproximativní metody jsou obvykle složitější a výpočetně náročnější. To často vede k volbě hrubějších aproximací, které mohou vést až ke ztrátě duálních rysů a nedostačujícímu výkonu. Oproti tomu je reformulace více flexibilnější a uvažuje ztrátovou funkci jako součet dvou členů. Jeden z nich slouží pro kontrolu ztráty v důsledku odchylky od referenčních požadavků a druhý pak kontroluje míru neurčitosti. Takto navržené řízení je jednoduché, ale obvykle není zajištěno trvalé buzení, což opět vede k nedostačujícímu výkonu.

Je proto snahou oba přístupy vhodně kombinovat a využit výhod obou za současného potlačení jejich nedostatků. Příkladem takového postupu je bikriteriální metoda, která bude podrobněji popsána dále. [19]

2.3.1 Přehled metod

Následující přehled představuje vybrané suboptimální algoritmy využitelné k řešení úlohy duálního řízení. Vybírány byly především nejjednodušší algoritmy, které by teoreticky umožnily implementaci v reálném čase pro řízení synchronních strojů.

Bikriteriální metoda

Bikriteriální metoda je založena na relativně jednoduchém principu. Ve snaze splnit obě hlavní vlastnosti duálního řízení (opatrnost a buzení) je ztrátová funkce rozdělena na dvě části, proto se také metoda nazývá bikriteriální. První ztrátová funkce odpovídá takzvanému *opatrnému řízení*, které navrhuje tím menší řídící zásahy, čím je větší variance neznámých parametrů (proto opatrné). Nesnaží se však primárně tuto varianci nijak snížit. Druhá ztrátová funkce představuje kritérium pro optimální buzení. Tyto dvě ztrátové funkce je třeba současně minimalizovat. Jejich minimalizace ale jde obecně z podstaty problému proti sobě, navíc optimální budící zásah bývá zpravidla neomezeně velký. Proto je zvolen následující postup:

1. nejdříve je nalezeno optimální opatrné řízení

2. dále je vytyčena množina přípustných řešení kolem řízení nalezeného v bodě (1), například se může jednat o interval

3. druhá ztrátová funkce pro optimální buzení je minimalizována již pouze v rámci množiny přípustných řešení z bodu (2)

Konkrétní realizace hledání optimálního řídícího zásahu (minimalizace) pak již závisí na řešeném problému.

ρ-aproximace

Jako ρ-aproximace označujeme celý soubor suboptimálních přístupů ke zjednodušení řešení úlohy optimálního řízení, kdy se snažíme aproximovat pravděpodobnostní míru neznámých stavů a parametrů systému. Dále lze při užití této metody snadno nalézt odpovídající kategorii řídícího algoritmu, viz část 2.1. Dle [17, 18, 19] je problematika ρ-aproximací formulována následovně:

Hledání suboptimální řídící strategie je založeno na minimalizaci modifikované ztrátové funkce

$$J_t\left(I_t, \rho_t\right) = \mathbf{E}_{\rho_t}\left\{\sum_{i=t}^{T-1} g_{t+1}\left(x_{i+1}, u_i\right) \mid I_k\right\}.$$

V čase t je řídící strategie $u_t(I_t)$ nalezena pomocí aproximace podmíněné hustoty pravděpodobnosti stavů a parametrů systému pro budoucí časové kroky

$$\rho_t = \mathrm{p}\left(x_{t+i}, p_{t+i} \mid I_{t+i}\right),$$

pro $i = 0, 1, \ldots, T-t-1$, kde p značí hustotu pravděpodobnosti.

Pro různé volby ρ_t pak můžeme získat následující přístupy:

- *Řídící strategie s otevřenou smyčkou* (open-loop, OL) uvažuje systém bez zpětné vazby a optimální řízení je hledáno z apriorní informace o stavech a parametrech systému. Tento zjednodušující předpoklad je ekvivalentní aproximaci

$$\rho_t = \left\{\mathrm{p}\left(x_{t+i}, p_{t+i} \mid I_{t+i}\right) = \mathrm{p}\left(x_{t+i}, p_{t+i} \mid I_0\right), i = 0, \ldots, T-t-1\right\}.$$

- *Zpětnovazební řídící strategie s otevřenou smyčkou* (open-loop feedback, OLF) také uvažuje systém bez zpětné vazby, ale jen pro budoucích časové kroky ($t+1$ až T), v současném časovém kroku t zpětnou vazbu uvažuje. Pozorování y_t jsou tedy použita k estimaci stavů i parametrů systému, ale pouze v současném časovém kroku t, v budoucích již ne. Opět lze formulovat pomocí ρ-aproximace jako

$$\rho_t = \left\{\mathrm{p}\left(x_{t+i}, p_{t+i} \mid I_{t+i}\right) = \mathrm{p}\left(x_{t+i}, p_{t+i} \mid I_t\right), i = 0, \ldots, T-t-1\right\}.$$

- Pro srovnání zde bude uvedena i aproximace, která vede na již zmiňovaný přístup *Certainty Equivalence* (CE):

$$\begin{aligned}\rho_t = \{&\mathrm{p}\left(x_{t+i}, p_{t+i} \mid I_{t+i}\right) \\ &= \delta\left(x_{t+i} - \hat{x}_{t+i}\right)\delta\left(p_{t+i} - \hat{p}_{t+i}\right), i = 0, \ldots, T-t-1\},\end{aligned}$$

  kde δ značí Diracovu delta funkci a $\hat{x}_{t+i} = \mathbf{E}\left\{x_{k+i} \mid I_{t+i}\right\}$, $\hat{p}_{t+i} = \mathbf{E}\left\{p_{k+i} \mid I_t\right\}$.

- *Částečný CE přístup* (PCE) je založen na vhodné kombinaci předchozích postupů CE a OLF. Definujme rozšířený stavový vektor jako $z_t^T = \begin{pmatrix} x_t^T & p_t^T \end{pmatrix}$, tedy jako vektor sdružující původní stav systému a jeho neznámé parametry. Tento vektor následně rozdělíme na dvě části s prázdným průnikem $z_{1,t}$ a $z_{2,t}$. Nyní aplikujeme na část z_1 zjednodušující předpoklad CE a na část z_2 předpoklad OLF. To odpovídá následující ρ-aproximaci

$$\begin{aligned}\rho_t &= \{\mathrm{p}\left(z_{1,t+i}, z_{2,t+i} \mid I_{t+i}\right) \\ &= \delta\left(z_{1,t+i} - \hat{z}_{1,t+i}\right) \mathrm{p}\left(z_{2,t+i} \mid I_t\right), i = 0, \ldots, T-t-1\},\end{aligned}$$

  kde $\mathrm{p}\left(z_{1,t+i}, z_{2,t+i} \mid I_{t+i}\right) = \mathrm{p}\left(z_{t+i} \mid I_{t+i}\right) = \mathrm{p}\left(x_{t+i}, p_{t+i} \mid I_{t+i}\right)$. Samotné rozdělení vektoru z na dvě části je třeba vyřešit s ohledem na konkrétní strukturu systému, pro který je řízení navrhováno. Vhodnou volbou může být například označit jako z_1 stavové veličiny, které jsou přímo pozorovány.

V případě výše uvedených případů ρ-aproximací se jedná o neduální zjednodušení původního problému. S výhodou však lze užít kombinace například s bikriteriální metodou. Příkladem takového využití je postup uvedený v [21].

Řešení LQG problému pomocí teorie her

Výpočetně relativně málo náročné řešení diskrétního LQG problému duálního řízení je představeno v [49]. Na řešení problému se užívá teorie her, kde hledáme optimální znáhodněnou strategii. Výsledkem pak je, že optimální řešení přeformulovaného problému duálního řízení je vážený průměr konečného počtu standardních LQG optimálních regulátorů. Jako váhové faktory jsou brány zobecněné věrohodnostní poměry.

2.3.2 Injektáže jako duální řízení

Na injektáže lze z jistého směru pohlížet také jako na duální řízení. Především v sobě kombinují obě žádoucí vlastnosti, opatrnost a buzení. Opatrnost je reprezentována konkrétním použitým regulátorem, který se snaží co nejlépe sledovat cíl řízení. Injektovaný signál pak představuje buzení, které napomáhá k určení parametrů stroje.

V základním návrhu je přidáván vysokofrekvenční signál stále, bez ohledu na okolnosti a tedy tento návrh se příliš nesnaží o nalezení kompromisu mezi opatrným řízením a buzením. Velkou výhodou ale je, že to příliš nevadí, obzvláště při nízkých otáčkách, protože vysokofrekvenční signál má minimální vliv na samotný chod stroje. Současně ale poskytuje relativně dobrý odhad natočení rotoru, jehož kvalita nezávisí na otáčkách, ale pouze na anizotropiích stroje.

Jistý krok směrem k hledání kompromisu mezi opatrností a buzením lze pozorovat u hybridních metod, které buď plynule, nebo jednorázově přepínají mezi dvěma modely, s injektáží a bez ní. Jeden je určen pro dobrou estimaci a druhý pro nízké ztráty při řízení. To vede k velkému zlepšení, protože přídavný signál je injektován, jen, když je opravdu potřeba.

Hlavním problémem injektáží z hlediska duálního řízení je, že se jedná o přístup pouze pro jeden konkrétní případ, který byl navržen s využitím konkrétních vlastností PMSM a pro předem určený účel. Injektovaný vysokofrekvenční signál je užívaný jednak z důvodu menšího vlivu na chod samotného stroje. Další důvod pro jeho užití je relativně snadné zpracování a vyhodnocení pomocí metod analýzy signálu, které lze snadno implementovat hardwarově (filtry, demodulace, fázový závěs). Problémem injektovaného signálu jsou pak jeho parametry, jako amplituda a frekvence, ty jsou zpravidla nalézány experimentálně.

Dalším zásadním problémem je, že injektáže fungují pouze na motory s anizotropiemi nějakého typu a jejich aplikace na SMPMSM je tedy značně omezena. Jedná se tedy sice o funkční metodu, kterou však lze aplikovat pouze na podskupinu všech dostupných strojů.

Je tedy na místě položit otázku, jestli takovýto přídavný signál může být optimálním buzením a nebo mu být alespoň v nějakém smyslu blízko. Odpovědět samozřejmě není snadné z důvodu praktické neřešitelnosti problému nalezení optimálního duálního řízení. Ve prospěch injektáží, a zejména hybridních metod, mluví výsledky praktických experimentů na skutečných motorech, proti nim pak zejména to, že byly navrhovány bez ohledu na optimalitu a hledání kompromisu mezi opatrností a buzením. Nicméně se jedná o dobrý základ, který je vhodný k bližšímu prostudování při návrhu méně náročných metod duálního řízení.

2.4 Aposteriorní Cramer-Raovy meze

Při vyhodnocování efektivity jednotlivých použitých algoritmů je výhodné mít k dispozici prostředek k jejich srovnání. K tomuto účelu lze použít aposteriorních Cramer-Raových mezí (Posterior Cramer-Rao Bounds, PCRB). Interpretace PCRB je zjednodušeně taková, že představují „množství informace“, které je o dané veličině produkováno na výstupu systému [47]. Konkrétněji se jedná o dolní mez střední kvadratické chyby [52]. Tedy reprezentuje minimální chybu, které se odhadovací algoritmus v uvažovaném případě dopustí. PCRB lze tedy využít ke srovnání jednotlivých uvažovaných duálních algoritmů v tom smyslu, že je možné vyhodnocovat, jak každý z nich dokáže zlepšit odhad stavových veličin a zvýšit pozorovatelnost v kritických režimech.

Následující popis PCRB včetně její specializace pro nelineární filtraci a dále pro Gaussovské hustoty je převzat z [52], kde je možné nalézt i detaily odvození zmiňovaných vztahů.

Definice

Nechť x představuje vektor měřených dat a θ je r-rozměrný odhadovaný náhodný parametr. Dále nechť $p_{x,\theta}\left(X,\Theta\right)$ je sdružená hustota pravděpodobnosti dvojice (x,θ) a $g\left(x\right)$ je funkce x, která je odhadem θ. Pak PCRB chyby odhadu má tvar

$$P = \mathbf{E}\left\{\left[g(x)-\theta\right]\left[g(x)-\theta\right]^{T}\right\} \geq J^{-1},$$

kde J je Fischerova informační matice rozměru $r \times r$ s prvky

$$J_{ij} = \mathbf{E}\left[-\frac{\partial^2 \log p_{x,\theta}(X,\Theta)}{\partial\Theta_i \partial\Theta_j}\right],$$

pro $i, j = 1, \ldots, r$.

Nelineární filtrace

Pro případ filtrace jsou parametry odhadovány postupně v průběhu času na základě rekurzivních vzorců. Sdruženou hustotu pravděpodobnosti lze rozepsat jako součin podmíněných hustot a vypočítat pro každý čas matici J_t, kde J_t^{-1} představuje spodní mez střední kvadratické chyby odhadu x_t.

Uvažujme nelineární filtrační problém se systémem

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= f_t(x_t, w_t), \\ z_t &= h_t(x_t, v_t), \end{aligned} \tag{2.2}$$

kde x_t je stav systému v čase t, z_t je pozorování v čase t, w a v jsou vzájemně nezávislé bílé procesy a f_t a h_t jsou obecně nelineární funkce. Pak je možné počítat rekurzivně posloupnost aposteriorních informačních matic J_t pro odhad stavu x_t jako

$$J_{t+1} = D_t^{22} - D_t^{21}\left(J_t + D_t^{11}\right)^{-1} D_t^{12}, \tag{2.3}$$

kde matice D_t jsou dány rovnostmi

$$\begin{aligned} D_t^{11} &= \mathbf{E}\left\{-\triangle_{x_t}^{x_t} \log p(x_{t+1} \mid x_t)\right\}, \\ D_t^{12} &= \mathbf{E}\left\{-\triangle_{x_t}^{x_{t+1}} \log p(x_{t+1} \mid x_t)\right\}, \\ D_t^{21} &= \mathbf{E}\left\{-\triangle_{x_{t+1}}^{x_t} \log p(x_{t+1} \mid x_t)\right\} = \left(D_t^{12}\right)^T, \\ D_t^{22} &= \mathbf{E}\left\{-\triangle_{x_{t+1}}^{x_{t+1}} \log p(x_{t+1} \mid x_t)\right\} + \mathbf{E}\left\{-\triangle_{x_{t+1}}^{x_{t+1}} \log p(z_{t+1} \mid x_{t+1})\right\}. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Aditivní Gaussovský šum

Uvažujme speciální případ filtračního problému s aditivním šumem, kdy rovnice (2.2) má tvar

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= f_t(x_t) + w_t, \\ z_t &= h_t(x_t) + v_t \end{aligned} \tag{2.5}$$

a dále šumy w a v jsou Gaussovské s nulovou střední hodnotou a kovariančními maticemi Q_t a R_t v tomto pořadí. Pak lze rovnice (2.4) zjednodušit na tvar

$$\begin{aligned} D_t^{11} &= \mathbf{E}\left\{\left[\nabla_{x_t} f_t^T(x_t)\right] Q_t^{-1} \left[\nabla_{x_t} f_t^T(x_t)\right]^T\right\}, \\ D_t^{12} &= -\mathbf{E}\left\{\nabla_{x_t} f_t^T(x_t)\right\} Q_t^{-1}, \\ D_t^{22} &= Q_t^{-1} + \mathbf{E}\left\{\left[\nabla_{x_{t+1}} h_{t+1}^T(x_{t+1})\right] R_{t+1}^{-1} \left[\nabla_{x_{t+1}} h_{t+1}^T(x_{t+1})\right]^T\right\}. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Pro úplnost je vhodné uvést, že v případě lineárního systému, to jest lineárních funkcí f_t a h_t, odpovídá rekurzivní výpočet matice J_t, založený na výše uvedených maticích (2.6) pro D_t, výpočtu aposteriorní kovarianční matice Kalmanova filtru $P_t = J_t^{-1}$, viz [52].

2.5 Lineárně kvadraticky Gaussovské řízení

Lineárně kvadraticky Gaussovské řízení (Linear-Quadratic-Gaussian, LQG) je jednou ze základních úloh teorie řízení. Jak již název této metody napovídá, uplatňuje se pro řízení lineárních systémů s kvadratickou ztrátovou funkcí a dále je uvažován aditivní bílý Gaussovský šum. V takovém případě pak platí separační princip a je možno zvlášť navrhnout optimálního pozorovatele a optimální regulátor při současném zachování optimality celého návrhu. Optimálním pozorovatelem pro tento případ je Kalmanův filtr a optimální řešení problému řízení je LQ regulátor. [4]

Vzhledem k zamýšlené aplikaci na nelineární točivý stroj však nelze LQG přístup přímo aplikovat, je však možno použít jeho zobecnění založené na linearizaci nelineárního systému. Pro nelineární systém ale obecně neplatí separační princip a zobecněné LQG nebude optimální a bude se jednat o CE přístup v důsledku oddělení estimační a řídící části.

Zobecnění Kalmanova filtru představuje rozšířený Kalmanův filtr uvedený v následujícím odstavci, zobecnění LQ regulátoru pak bude provedeno v dalším odstavci pomocí vhodné linearizace systému.

2.5.1 Rozšířený Kalmanův filtr

Zde bude uvedena základní formulace v textu často zmiňovaného rozšířeného Kalmanova filtru (Extended Kalman Filter, EKF). Typicky je algoritmus standardního Kalmanova filtru používán jako pozorovatel lineárního systému. Je však možno jej zobecnit i pro nelineární systémy a pak hovoříme o rozšířeném Kalmanově filtru. Zobecnění je založeno na jednoduché myšlence, kdy původní nelineární systém linearizujeme v každém časovém kroku v okolí odhadu, střední hodnoty a kovariance. Popis standardního Kalmanova filtru je možno nalézt v [4]. Následující popis rozšířeného Kalmanova filtru je převzat z [46, 60]:

Modelový systém

Předpokládejme nelineární dynamický systém s aditivním šumem popsaný rovnicemi

$$\begin{aligned} x_t &= f\left(x_{t-1}, u_{t-1}\right) + w_{t-1}, \\ y_t &= h\left(x_t\right) + v_t, \end{aligned}$$

pro $t = 1, \ldots, T$, kde x_t je vektor stavu, u_t vektor řízení, y_t vektor pozorování (měření) a vektory v_t a w_t představují na sobě vzájemně nezávislý Gaussovský bílý šum s nulovou střední hodnotou a kovariančními maticemi R_t a Q_t v tomto pořadí; obecně nelineární funkce f představuje funkci systému a h funkci měření a předpokládáme je známé.

Označme nyní A Jacobiho matici parciálních derivací f dle x v bodě odhadu, tedy $(A_t)_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}\left(\hat{x}_{t-1}, u_{t-1}, 0\right)$. Obdobně pro funkci h označme C matici derivací $(C_t)_{ij} =$

$\frac{\partial h_i}{\partial x_j}(\tilde{x}_t, 0)$, kde $\tilde{x}_t$ představuje aproximaci stavu vypočtenou z odhadu bez šumu $\tilde{x}_t = f(\hat{x}_{t-1}, u_{t-1}, 0)$.

Algoritmus

Samotný algoritmus EKF můžeme rozdělit na dvě fáze. V první označované jako časová oprava (time update) nebo také *predikce* se vypočítá apriorní odhad stavu a kovarianční matice:

$$\begin{aligned} \overline{\hat{x}}_t &= f(\hat{x}_{t-1}, u_{t-1}, 0), \\ \overline{P}_t &= A_t P_{t-1} A_t^T + Q_{t-1}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Ve druhé části označované jako oprava měření (measurement update) neboli *korekce* pak získáme aposteriorní odhad stavu $\hat{x}_t$ a kovarianční matice P_t:

$$\begin{aligned} K_t &= \overline{P}_t C_t^T \left(C_t \overline{P}_t C_t^T + R_t \right)^{-1}, \\ \hat{x}_t &= \overline{\hat{x}}_t + K_t \left(y_t - h\left(\overline{\hat{x}}_t, 0 \right) \right), \\ P_t &= (I - K_t C_t) \overline{P}_t, \end{aligned} \tag{2.8}$$

kde I značí jednotkovou matici vhodného rozměru. Pro úplnost je ještě třeba dodat počáteční apriorní odhady $\hat{x}_0$ a P_0.

2.5.2 Lineárně kvadratický regulátor

Lineárně kvadratický regulátor (Linear-Quadratic, LQ) je primárně navržen pro řízení lineárních systémů s kvadratickou ztrátovou funkcí. Dále je třeba zmínit, že existuje celá řada různých modifikací a vylepšení základního algoritmu, například pro nelineární systémy nebo lepší numerické vlastnosti. Základní formulace podle [4] je následovná:

Uvažujme lineární systém

$$x_{t+1} = A_t x_t + B_t u_t + w_t, \quad t = 0, 1, \ldots, T-1, \tag{2.9}$$

kde obecně vektorová veličina x_t reprezentuje stav systému v časovém kroku t, veličina u_t řízení v čase t a w_t je vzájemně nezávislý Gaussovský bílý šum s nulovou střední hodnotou a známou kovarianční maticí, dále je uvažován konečný diskrétní časový horizont T kroků.

Kvadratická ztrátová funkce je

$$\mathbf{E}\left\{ x_T^T Q_T x_T + \sum_{t=0}^{T-1} \left(x_t^T Q_t x_t + u_t^T R_t u_t \right) \right\}, \tag{2.10}$$

kde $\mathbf{E}$ značí střední hodnotu, Q_t a R_t jsou penalizační matice stavu systému (splnění požadavků řízení), respektive penalizace vstupů. Na tyto matice jsou kladeny požadavky,

že $Q_t \geq 0$ a $R_t > 0$. Při uvažování neúplné informace I_t o stavu je optimální řízení μ_t v každém časovém kroku rovno

$$\mu_t(I_t) = L_t \mathbf{E}\left\{x_t \mid I_t\right\},$$

kde matice L_t je dána rovností

$$L_t = -\left(R_t + B_t^T K_{t+1} B_t\right)^{-1} B_t^T K_{t+1} A_t, \tag{2.11}$$

přičemž matice K_t získáme rekurzivně z Riccatiho rovnice

$$\begin{aligned} K_T &= Q_T, \\ K_t &= A_t^T \left(K_{t+1} - K_{t+1} B_t \left(R_t + B_t^T K_{t+1} B_t\right)^{-1} B_t^T K_{t+1}\right) A_t + Q_t. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Lineárně kvadratický algoritmus s QR rozkladem

Předchozí výpočet pomocí Riccatiho rovnice (2.11) a (2.12) však není příliš vhodným z numerických důvodů [13]. Místo něj je pro praktické výpočty výhodnější použít například algoritmus lineárně kvadratického řízení založený na QR rozkladu [14]. Tento algoritmus má lepší numerické vlastnosti, umožňuje snadnější výpočet maticové inverze (invertována pouze trojúhelníková matice) a lze pomocí něj implementovat i složitější kvadratickou ztrátovou funkci (nejen dva členy pro penalizaci stavu a vstupů).

Postup je založen na přepisu kvadratické ztráty do tvaru

$$x_{t+1}^T Q_t x_{t+1} + u_t^T R_t u_t = x_{t+1}^T \sqrt{Q_t}^T \sqrt{Q_t} x_{t+1} + u_t^T \sqrt{R_t}^T \sqrt{R_t} u_t, \tag{2.13}$$

kde $\sqrt{}$ je vhodná maticová odmocnina. Vzhledem k požadavkům positivní (semi)definitnosti na matice Q_t a R_t má tato odmocnina smysl. V každém časovém kroku t pak minimalizujeme funkci

$$x_{t+1}^T \sqrt{Q_t}^T \sqrt{Q_t} x_{t+1} + u_t^T \sqrt{R_t}^T \sqrt{R_t} u_t + x_{t+1}^T \sqrt{\Sigma_t}^T \sqrt{\Sigma_t} x_{t+1}, \tag{2.14}$$

kde Σ_t reprezentuje ztrátu v následujících časových krocích až do konce časového horizontu, jedná se o rekurzivní součet pozitivních ztrát a tedy maticová odmocnina má opět smysl. Do tohoto kvadratického výrazu je možno dosadit model vývoje pro $x_{t+1} = A_t x_t + B_t u_t$ a následně jej zapsat maticově ve tvaru

$$\begin{pmatrix} u_t \\ x_t \end{pmatrix}^T \begin{bmatrix} \sqrt{Q_t} B_t & \sqrt{Q_t} A_t \\ \sqrt{R_t} & 0 \\ \sqrt{\Sigma_t} B_t & \sqrt{\Sigma_t} A_t \end{bmatrix}^T \underbrace{\begin{bmatrix} \sqrt{Q_t} B_t & \sqrt{Q_t} A_t \\ \sqrt{R_t} & 0 \\ \sqrt{\Sigma_t} B_t & \sqrt{\Sigma_t} A_t \end{bmatrix}}_{Z} \begin{pmatrix} u_t \\ x_t \end{pmatrix}. \tag{2.15}$$

Na matici Z následně aplikujeme QR rozklad, to jest $Z = Q_Z R_Z$ a předchozí vztah upravíme na tvar

$$\begin{pmatrix} u_t \\ x_t \end{pmatrix}^T Z^T Z \begin{pmatrix} u_t \\ x_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_t \\ x_t \end{pmatrix}^T R_Z^T Q_Z^T Q_Z R_Z \begin{pmatrix} u_t \\ x_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_t \\ x_t \end{pmatrix}^T R_Z^T R_Z \begin{pmatrix} u_t \\ x_t \end{pmatrix},$$

kde využijeme vlastnosti $Q_Z^T Q_Z = I$. Matice R_Z je v horním trojúhelníkovém tvaru, tedy blokově zapsáno

$$R_Z = \begin{bmatrix} R_{uu} & R_{ux} \\ 0 & R_{xx} \end{bmatrix}.$$

Ztrátu nyní můžeme zapsat jako

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u_t \\ x_t \end{pmatrix}^T R_Z^T R_Z \begin{pmatrix} u_t \\ x_t \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} R_{uu}u_t + R_{ux}x_t \\ R_{xx}x_t \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} R_{uu}u_t + R_{ux}x_t \\ R_{xx}x_t \end{pmatrix} \\ &= (R_{uu}u_t + R_{ux}x_t)^T (R_{uu}u_t + R_{ux}x_t) + x_t^T R_{xx}^T R_{xx} x_t, \end{aligned}$$

kterou, vzhledem k její kvadratičnosti a nezávislosti druhého členu na u_t, zřejmě minimalizujeme volbou u_t takovou, že $(R_{uu}u_t + R_{ux}x_t) = 0$ a tedy volíme

$$u_t = -R_{uu}^{-1} R_{ux} x_t.$$

Matici $R_{xx}^T R_{xx}$ pak použijeme do předchozího časového kroku jako novou matici Σ.

3 Aplikace duálního řízení na PMSM

Tato kapitola je věnována spojení předchozích dvou, tedy aplikaci vybraných algoritmů popsaných v kapitole o teorii řízení na konkrétní systém, PMSM, uvedený v první kapitole. Nejdříve budou uvedeny konkrétní matice používané pro rozšířený Kalmanův filtr a následně i pro výpočet aposteriorních Cramer-Raových mezí. Dále budou odvozeny různé verze lineárně kvadratického regulátoru jako alternativa ke klasicky užívaným PI regulátorům používaným pro vektorové řízení PMSM. Následovat bude popis algoritmu využívajícího hyperstav, který vychází právě z EKF a LQ regulátoru. Na závěr této kapitoly bude ještě popsána vybraná verze bikriteriální metody a návrh založený na využití injektáží.

3.1 Úloha řízení PMSM

Nejdříve je nutno přesně specifikovat úlohu, jakou se vybranými algoritmy pokusíme řešit. Této specifikace se dále v textu budeme držet, aby byly zajištěny v jistém ohledu stejné podmínky pro všechny algoritmy.

Řízeným systémem bude synchronní motor s permanentními magnety. Pro možné nasazení metod využívajících anizotropie předpokládáme v tomto stroji různé indukčnosti v osách $d-q$, tedy $L_d \neq L_q$.

Dále je uvažován PMSM v bezsenzorovém návrhu, to znamená, že mechanické veličiny poloha a otáčky nejsou měřeny. Měřenými veličinami jsou pouze proudy v osách $\alpha - \beta$. Řídící veličiny reprezentované napětími v osách $\alpha - \beta$ předpokládáme známé před vstupem do řídící elektroniky, skutečná napětí měřena nejsou.

Napětí jako řídící veličiny navíc neuvažujeme libovolné, ale pouze z daného intervalu $\langle -U_{max}, U_{max} \rangle$. To vyjadřuje reálná omezení použitého napájecího zdroje.

V textu uvažujeme výhradně řízení otáček a referenční signál je tedy předpokládán v podobě požadované hodnoty otáček $\overline{\omega}_t$ v daném čase t.

Protože je nejdříve nutné zvládnout řízení stroje bez zátěže je zátěžný moment T_L uvažován pro jednoduchost nulový.

Dále uvažujeme, že na počátku (v nulovém čase) nemáme žádnou informaci o poloze hřídele. To lze vyjádřit tak, že rozdělení počáteční polohy ϑ_0 je uniformní na intervalu $(-\pi, \pi\rangle$.

Jako univerzální kritérium pro posuzování kvality jednotlivých aplikovaných řídících strategií bude brán kvadrát odchylky skutečných a požadovaných otáček.

3.2 Rozšířený Kalmanův filtr

V této práci byl jako pozorovatel používán rozšířený Kalmanův filtr. Budeme-li vycházet z popisu PMSM pomocí rovnic (1.17) pro stejné nebo (1.18) pro různé indukčnosti, nabízí se více možností za jakých podmínek algoritmus EKF použít. Pro implementaci je však rozumných pouze několik málo z nich.

Především nemá příliš smysl uvažovat EKF v rotorových souřadnicích $d-q$. Transformace ze statorových souřadnic, ve kterých probíhá měření, do rotorových totiž závisí na úhlu natočení ϑ, viz rovnice (1.1). Hodnotu tohoto úhlu ale neznáme a navíc se jedná v podstatě o hlavní veličinu, kterou chceme pomocí EKF odhadnout. Dalším problémem je, že v rovnicích popisujících PMSM (v případě stejných i různých indukčností) v souřadné soustavě $d-q$ hodnota ϑ vůbec nevystupuje a tedy ji z nich nelze rozumně určit. Jistou možností, kdy by mělo smysl uvažovat EKF v souřadné soustavě $d-q$, je případ, že bychom znali hodnotu ϑ nebo její odhad z jiného zdroje. Příkladem by mohla být znalost úhlu na základě aplikace vhodné injektážní techniky. Dále však budeme uvažovat EKF pouze ve statorových souřadnicích, konkrétně $\alpha-\beta$.

3.2.1 Šum

Algoritmus EKF předpokládá Gaussovský model šumu. Vzhledem k popisu neurčitostí v PMSM, odstavec 1.2.5, tento předpoklad splněn není. Lze však provést aproximaci hustoty pravděpodobnosti skutečného šumu Gaussovskou hustotou s vhodnými parametry. Tyto parametry lze buď nalézt na základě teoretické analýzy vlastností šumu, jako v [41] nebo je lze nalézt experimentálně. V této práci posloužily jako výchozí hodnoty stanovené ve zmiňovaném zdroji [41], které byly následně experimentálně dopraveny.

3.2.2 Plný model

Prvním diskutovaným případem bude návrh dále označovaný jako *plný model* a budou uvažovány stejné indukčnosti v osách $d-q$. Všechny veličiny i_α, i_β, ω a ϑ popisující PMSM označíme jako stav x. Za pozorování y budeme považovat proudy i_α a i_β doplněné chybou měření. Plný model je tedy popsán stavem a měřením

$$\begin{aligned} x_t &= (i_{\alpha,t}, i_{\beta,t}, \omega_t, \vartheta_t)^T, \\ y_t &= (y_{\alpha,t}, y_{\beta,t})^T, \end{aligned}$$

jejichž vývoj v čase je dán rovnicemi modelového systému z části 2.5.1

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= f(x_t, u_t) + w_t, \\ y_t &= h(x_t) + v_t, \end{aligned}$$

kde funkce f odpovídá soustavě rovnic (1.20) a funkce h je pouze identitou na první dvou složkách argumentu. Vektory w_t a v_t pak reprezentují vzájemně nezávislé bílé Gaussovské šumy s nulovou střední hodnotou a známými kovariančními maticemi Q_t a R_t v tomto pořadí.

Pro výpočet rekurzivního algoritmu EKF, rovnice (2.7) a (2.8), je třeba znát Jacobiho matice parciálních derivací A_t a C_t, kde $(A_t)_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\hat{x}_{t-1}, u_{t-1}, 0)$ a $(C_t)_{ij} = \frac{\partial h_i}{\partial x_j}(\tilde{x}_t, 0)$. V tomto případě je výpočet poměrně jednoduchý a výsledné matice jsou

$$\begin{aligned} A_t &= \begin{bmatrix} a & 0 & b\sin\hat{\vartheta}_{t-1} & b\hat{\omega}_{t-1}\cos\hat{\vartheta}_{t-1} \\ 0 & a & -b\cos\hat{\vartheta}_{t-1} & b\hat{\omega}_{t-1}\sin\hat{\vartheta}_{t-1} \\ -e\sin\hat{\vartheta}_{t-1} & e\cos\hat{\vartheta}_{t-1} & d & -e\left(\hat{i}_{\beta,t-1}\sin\hat{\vartheta}_{t-1} + \hat{i}_{\alpha,t-1}\cos\hat{\vartheta}_{t-1}\right) \\ 0 & 0 & \Delta t & 1 \end{bmatrix}, \\ C_t &= C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

3.2.3 Redukovaný model

Redukovaný model se snaží usnadnit výpočet algoritmu EKF tím způsobem, že zmenšuje uvažovaný stav systému. Kritickým místem použití EKF je totiž časově náročná maticová inverze, viz část 2.5.1. Pro plný model má vektor stavu velikost 4 a tedy je invertována matice o rozměru 4×4, oproti tomu redukovaný model užívá pouze stavu velikosti 2 a inverze matice 2×2 je znatelně rychlejší.

Hlavní myšlenkou je nezahrnovat proudy i_α a i_β do stavu a definovat je přímo jako měření, tedy

$$\begin{aligned} x_t &= (\omega_t, \vartheta_t)^T, \\ y_t &= (i_{\alpha,t}, i_{\beta,t})^T. \end{aligned}$$

Vyjdeme tedy ze stejných diskrétních rovnic popisujících PMSM (3.1), ale nyní první dvě rovnice představují měření a druhé dvě vývoj systému. Matice pro EKF jsou pak ve tvaru

$$\begin{aligned} A_t &= \begin{bmatrix} d & -e\left(\hat{i}_{\beta,t-1}\sin\hat{\vartheta}_{t-1} + \hat{i}_{\alpha,t-1}\cos\hat{\vartheta}_{t-1}\right) \\ \Delta t & 1 \end{bmatrix}, \\ C_t &= \begin{bmatrix} b\sin\hat{\vartheta}_{t-1} & b\hat{\omega}_{t-1}\cos\hat{\vartheta}_{t-1} \\ -b\cos\hat{\vartheta}_{t-1} & b\hat{\omega}_{t-1}\sin\hat{\vartheta}_{t-1} \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Dále je pak třeba ještě upravit hodnoty kovariančních matic pro šumy. Označme kovarianční matice plného stavu jako Q a R a předpokládejme, že Q je blokově diagonální s bloky o rozměru 2×2, tedy

$$Q = \begin{bmatrix} Q_1 & \\ & Q_2 \end{bmatrix}.$$

Ze vztahu pro součet dvou normálních náhodných veličin jsou pak kovarianční matice pro redukovaný model ve tvaru

$$\begin{aligned} Q_{red} &= Q_2, \\ R_{red} &= R + Q_1. \end{aligned}$$

3.2.4 Různé indukčnosti

V případě plného modelu pro různé indukčnosti L_d a L_q je postup zcela analogický, jen výchozí rovnice jsou jiné. V praxi jsou však rovnice poměrně složité a proto nejsou uvedeny přímo zde v textu, lze je však nalézt v příloze. Matice pro redukovaný model při uvažování různých indukčností jsou pak opět uvedeny v příloze.

3.3 Aposteriorní Cramer-Raovy meze

3.3.1 Užité modely

Obecně byly použity čtyři typy modelů v souřadném systému $\alpha\beta$. Souřadný systém dq nemá smysl uvažovat, jelikož nejvíce zajímavá mez polohy stále roste, což lze jednak usuzovat na základě tvaru rovnic, ale tento fakt byl ověřen i experimentálně. Jednotlivé modely se liší tím, jestli je uvažován *plný* nebo *redukovaný* stav systému. Dále pak jestli byl uvažován model motoru se *stejnými* nebo *různými* indukčnostmi v osách d a q. Matice derivací $A_n = \left[\nabla_{x_n} f_n^T(x_n)\right]^T$ zobrazení f_n a matice $C_{n+1} = \left[\nabla_{x_{n+1}} h_{n+1}^T(x_{n+1})\right]^T$ zobrazení h_{n+1} dle jednotlivých stavových veličin jsou ekvivalentní maticím používaným pro EKF. Obdobné je to i s kovariančními maticemi Q a R.

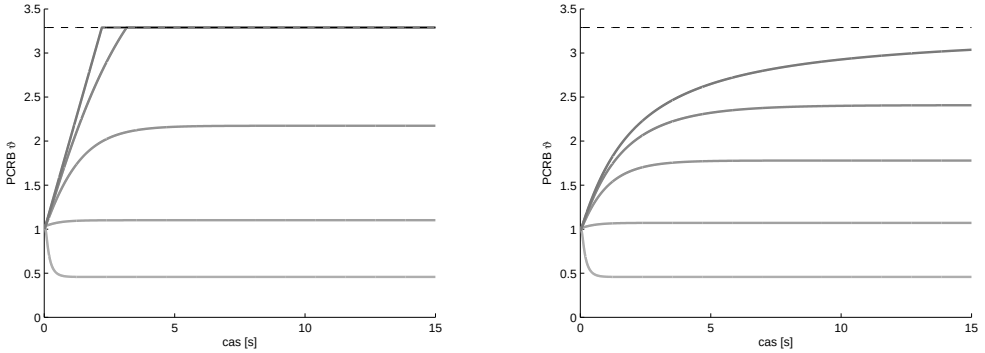
3.3.2 Omezování hodnot meze

Vzhledem k tomu, že poloha ϑ je vyjádřena jako úhel (v radiánech), má smysl ji uvažovat pouze v intervalu $(-\pi, \pi\rangle$. V modelu pro výpočet PCRB je však ϑ uvažována jako náhodná veličina s normálním rozdělením, která nabývat hodnot z celé reálné osy a následně může PCRB dosáhnout velmi vysokých hodnot. Tyto hodnoty však pro interpretaci ve vztahu k PMSM nemají smysl, protože nejhorší případ (ve smyslu největší neznalosti parametru ϑ) nastává, když je hodnota ϑ rovnoměrně rozdělena v intervalu $(-\pi, \pi\rangle$, tedy o hodnotě úhlu natočení ϑ není žádná informace. Proto má smysl uvažovat hodnoty PCRB ϑ jen do velikosti variance rovnoměrného rozdělení na intervalu $(-\pi, \pi\rangle$, tato hodnota je $\frac{\pi^2}{3}$. Nad touto hranicí nemá smysl mez ϑ uvažovat a vyšší hodnoty je buď možno oříznout pevnou mezí nebo pomocí výpočtu ořízntutého normálního rozdělení, který bude užit dále. Srovnání obou možností je zachyceno na grafech Obrázek 3.1.

Postup s oříznutím normálního rozdělení je samozřejmě velmi zjednodušený. Správný postup by vyžadoval odvodit vztahy pro skutečnou, tedy negaussovskou, hustotu úhlu natočení. To je však poměrně náročná úloha, především z důvodu, že skutečná hustota úhlu natočení není ani přesně známa. Proto se dále v textu omezíme na přístup využívající ořez normální hustoty.

Oříznuté normální rozdělení Následující popis čerpá z [57]:

Oříznuté normální rozdělení pro skalární náhodnou veličinu x je definováno jako normální rozdělení $\mathrm{N}(\mu, r)$ na omezeném supportu $a < x \leq b$. Momenty tohoto rozdělení



a) pevná mez b) oříznuté normální rozdělení

Obrázek 3.1: Srovnání metod omezování hodnoty PCRB polohy ϑ: První možností je oříznutí pevnou mezí $\frac{\pi^2}{3}$ (znázorněna čárkovaně), druhou pak užití oříznutého normálního rozdělení.

jsou:

$$\begin{aligned} \hat{x} &= \mu - \sqrt{r}\varphi(\mu, r), \\ \hat{x^2} &= r + \mu\hat{x} - \sqrt{r}\kappa(\mu, r), \end{aligned}$$

kde

$$\begin{aligned} \varphi(\mu, r) &= \frac{\sqrt{2}\left(\exp(-\beta^2) - \exp(-\alpha^2)\right)}{\sqrt{\pi}\left(\operatorname{erf}(\beta) - \operatorname{erf}(\alpha)\right)}, \\ \kappa(\mu, r) &= \frac{\sqrt{2}\left(b\exp(-\beta^2) - a\exp(-\alpha^2)\right)}{\sqrt{\pi}\left(\operatorname{erf}(\beta) - \operatorname{erf}(\alpha)\right)} \end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{a-\mu}{\sqrt{2r}}, \\ \beta &= \frac{b-\mu}{\sqrt{2r}}. \end{aligned}$$

Nyní pro speciální případ $a = -\pi$, $b = \pi$ a $\mu = 0$ je $\alpha = -\frac{\pi}{\sqrt{2r}} = -\beta$. Zřejmě tedy $\alpha^2 = \beta^2$ a čitatel φ je nulový, tedy $\varphi = 0$. Z tohoto pak hned vyplývá, že $\hat{x} = 0$ a $\operatorname{Var}(x) = \hat{x^2} - \hat{x}^2 = \hat{x^2}$. κ má po dosazení tvar

$$\kappa = \frac{2\sqrt{2}\pi\exp\left(-\frac{\pi^2}{2r}\right)}{2\sqrt{\pi}\operatorname{erf}\left(\frac{\pi}{\sqrt{2r}}\right)}.$$

Hodnota variance x je tedy

$$\operatorname{Var}(x) = r - \sqrt{2\pi r}\frac{\exp\left(-\frac{\pi^2}{2r}\right)}{\operatorname{erf}\left(\frac{\pi}{\sqrt{2r}}\right)}.$$

3.4 Lineárně kvadratický regulátor

Tento algoritmus předpokládá lineární systém, viz rovnice (2.9), kterým PMSM není a je tedy nutné provést linearizaci. Nelze ale přímo použít matice derivací odvozené v předchozí části 3.2. Zde je nutné vycházet z Taylorova rozvoje a zohlednit i případné konstantní členy. Obecně pro funkci $f(x)$ má rozvoj do prvního řádu v nějakém bodě x_0 tvar

$$f(x) \cong f(x_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0)(x - x_0),$$

kde parciální derivací $\frac{\partial f}{\partial x}$ je konkrétní matice A z předchozí části 3.2 týkající se EKF vypočtená v bodě x_0 a tedy

$$f(x) \cong Ax + (f(x_0) - Ax_0) = Ax + \gamma,$$

kde vektor γ představuje konstantní člen (nezávisí na x) a předchozí rovnice tedy není homogenní, jak bychom potřebovali jako výsledek linearizace pro rovnici (2.9). Proto tedy zvětšíme velikost matice A o 1 (o jeden sloupec a řádek) a stejně tak zvětšíme i velikost stavu o 1 (přidáme konstantu) a předchozí rovnici získáme ve tvaru

$$\begin{pmatrix} f(x) \\ 1 \end{pmatrix} \cong \overline{A} \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix},$$

kde

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} A & \gamma \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

přičemž 0 zde označuje nulový řádkový vektor vhodné velikosti. Tímto postupem lze již získat požadovaný lineární popis systému (2.9), který současně zohledňuje i konstantní členy.

Standardní postup pro lineárně kvadratický regulátor je výpočet rovnic (2.12), případně analogických rovnic založených na QR rozkladu, v čase zpět. V případě aplikace na nelineární systém jsou však vystupující matice obecně funkcí času. LQ regulátor pak není možno předpočítat a v každém časovém kroku je třeba jej získat znovu. To může být výpočetně velmi náročné, zejména pro dlouhé časové horizonty. Jedním ze způsobů jak tento problém vyřešit je aplikace takzvaného „ubíhajícího horizontu“. Tento koncept spočívá v tom, že místo výpočtu rovnic v čase zpět na celém horizontu je počítáme pouze na horizontu kratším, který se však v čase posunuje (klouže), tak aby začínal vždy v čase aktuálním. V termínech ztrátové funkce lze princip ubíhajícího horizontu vyjádřit tak, že zanedbáváme ztrátu mezi koncem kratšího horizontu a koncem původního celkového časového horizontu [4]. Zmiňovaný postup byl použit i při implementaci LQ regulátoru v tomto textu.

3.4.1 Ztrátová funkce

Protože chceme využít lineárně kvadratického algoritmu, je třeba formulovat ztrátovou funkci jako aditivní a kvadratickou, obecně ve tvaru daném rovnicí (2.10).

Hlavním požadavkem na systém je dosažení požadované hodnoty otáček $\overline{\omega}_t$ v čase t. Výše zmíněná ztráta (2.10) však vede na řízení pouze na nulovou hodnotu odpovídající $\overline{\omega} \equiv 0$, pro řízení na nenulové požadované otáčky je třeba modifikovat stav systému a zavést substituci

$$\psi_t = \omega_t - \overline{\omega}_t \tag{3.3}$$

a veličinu ψ pak již regulujeme na nulovou hodnotu. Tuto substituci, která závisí na $\overline{\omega}$ jako parametru, je třeba zanést do všech rovnic. Ve stavu systému veličina ψ_t nahradí veličinu ω_t. Dále je třeba zahrnout i všechny konstantní členy, které v důsledku substituce vzniknou.

Penalizační matici stavu systému v (2.10) budeme vzhledem k požadavku pouze na hodnotu otáček uvažovat nezávislou na čase $Q_t = Q$ pro všechna t, a ve tvaru

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{3.4}$$

kde q je pevně zvolená konstanta a matice Q má již rozměr 5×5, protože byl stav rozšířen o konstantní člen v důsledku linearizace. Koncovou matici Q_T budeme uvažovat nulovou.

Dalším požadavkem je omezení na napětí – vstupy do systému, vyjádřené pomocí maximálního napětí U_{max}, které je schopen poskytnout napájecí zdroj. Toto omezení můžeme zapsat jako

$$|u_{k,t}| \leq U_{max}, \tag{3.5}$$

tedy omezení na každou složku k vektoru u_t zvlášť. Tuto podmínku lze také považovat za definici množiny přípustných řízení U_t v čase t. Požadavek založený na absolutní hodnotě nelze přímo zapsat jako kvadratickou funkci a proto je třeba vhodně zvolit matici R_t v (2.10) aby dostatečně penalizovala příliš velké hodnoty řízení u_t a dále počítat s tím, že při přesažení hodnoty U_{max} dojde k ořezu. Výběr vhodných hodnot do matice R_t byl řešen experimentálně a bude mu věnována pozornost v části zabývající se experimenty, viz odstavec 4.2.1.

Rozšíření pro penalizaci přírůstků napětí

Chceme-li přidat ještě omezení na velikost změny vstupů $(u_{t+1} - u_t)^2$ což může v některých případech vylepšit chování LQ algoritmu, lze tak učinit přidáním dalšího členu do ztrátové funkce. Tento člen budeme volit opět kvadratický a to ve tvaru

$$(u_t - u_{t-1})^T S_t (u_t - u_{t-1}).$$

Penalizační matice S_t bude podobně jako matice R_t, nalezena experimentálně, detailněji viz odstavec 4.2.1.

Zmiňovaný člen ale ve standardní ztrátové funkci LQ regulátoru nevystupuje a jeho přidání již není tak snadné. Při implementaci takto modifikovaného algoritmu je třeba

vycházet z návrhu LQ algoritmu, založeného na maticovém QR rozkladu, viz odstavec 2.5.2. Tento algoritmus totiž relativně snadno umožňuje přidat další kvadratický člen, jedinou komplikací je nutnost rozšířit stávající stavový vektor o stará řízení u_{t-1}.

Uvažujme novou penalizační matici S_t pozitivně semidefinitní a do rovnice 2.13 vyjadřující kvadratickou ztrátu přidáme člen

$$(u_t - u_{t-1})^T S_t (u_t - u_{t-1}) = (u_t - u_{t-1})^T \sqrt{S_t}^T \sqrt{S_t} (u_t - u_{t-1}).$$

To následně vede na rovnici 2.15 ve tvaru

$$\begin{pmatrix} u_t \\ u_{t-1} \\ x_t \end{pmatrix}^T Z^T Z \begin{pmatrix} u_t \\ u_{t-1} \\ x_t \end{pmatrix},$$

s maticí Z danou jako

$$Z = \begin{bmatrix} \sqrt{Q_t} B_t & 0 & \sqrt{Q_t} A_t \\ \sqrt{R_t} & 0 & 0 \\ \sqrt{S_t} & -\sqrt{S_t} & 0 \\ \left(\sqrt{\Sigma_t}\right)_{3,\ldots,7} B_t & \left(\sqrt{\Sigma_t}\right)_{1,2} & \left(\sqrt{\Sigma_t}\right)_{3,\ldots,7} A_t \end{bmatrix},$$

kde 0 představuje nulovou matici vhodných rozměrů a dolní index slouží k označení sloupce matice. Zbytek popisu algoritmu je již stejný jako v odstavci 2.5.2 s tím rozdílem, že místo vektoru x_t dále pracujeme s vektorem $\tilde{x}_t = \begin{pmatrix} u_{t-1} \\ x_t \end{pmatrix}$.

Souřadné soustavy pro penalizační matice řízení

Uvažovaná ztrátovou funkcí penalizující obecně i přírůstky řízení je ve tvaru

$$\sum_{t=0}^{T-1} \left((x_t - \overline{x}_t)^T Q (x_t - \overline{x}_t) + u_t^T R u_t + (u_t - u_{t-1})^T S (u_t - u_{t-1}) \right), \tag{3.6}$$

kde řízení u_t respektive u_{t-1} jsou v souřadnicích $\alpha-\beta$. Osy α a β jsou zřejmě kvalitativně ekvivalentní a není důvod některou z nich upřednostňovat, není proto ani žádný důvod uvažovat jinou penalizaci, řízení případně jeho přírůstků, v těchto osách. Totéž ovšem nelze tvrdit o souřadných osách $d-q$. Z rovnic (1.22) případně (1.23) zřejmě plyne, že na otáčení stroje má vliv především q složka proudů a tedy potažmo i napětí. Může se tedy zdát rozumným volit rozdílnou penalizaci řídících vstupů v osách $d-q$.

Volme tedy rozdílnou časově nezávislou penalizaci řízení v osách $d-q$ v podobě diagonální matice

$$R^{dq} = diag(r_d, r_q).$$

Uvažujeme-li ztrátovou funkci v souřadném systému $\alpha-\beta$, převedeme penalizační matici R do těchto souřadnic a ta se stane závislou na čase

$$R_t^{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} \cos\vartheta_t & -\sin\vartheta_t \\ \sin\vartheta_t & \cos\vartheta_t \end{bmatrix} R^{dq} \begin{bmatrix} \cos\vartheta_t & \sin\vartheta_t \\ -\sin\vartheta_t & \cos\vartheta_t \end{bmatrix}, \tag{3.7}$$

kde se jako úhel ϑ_t využívá jeho odhad v čase t. Analogický vztah lze použít i pro penalizaci přírůstků (matice S^{dq} a $S_t^{\alpha\beta}$).

3.4.2 LQ regulátor v $\alpha - \beta$

Stejné indukčnosti

Pro případ plného stavu je matice A_t dána vztahem (3.1), kde jako hodnoty odhadu stavových veličin (složek vektoru $\hat{x}_t$) použijeme hodnoty bodu x_0, ve kterém linearizujeme. Konstantní člen $\gamma = f(x_0) - A_t x_0$ je vypočten jako

$$\gamma = \begin{pmatrix} -b\omega_0\vartheta_0 \cos\vartheta_0 \\ -b\omega_0\vartheta_0 \sin\vartheta_0 \\ e\vartheta_0 \left(i_{\beta,0} \sin\vartheta_0 + i_{\alpha,0} \cos\vartheta_0\right) \\ 0 \end{pmatrix},$$

kde dolní index 0 neznačí nulový čas, ale bod linearizace x_0. Matice $\overline{A}_t$ v bodě x_0 (složky x_0 budou opět značeny dolním indexem 0) pak je

$$\begin{bmatrix} a & 0 & b\sin\vartheta_0 & b\omega_0\cos\vartheta_0 & -b\omega_0\vartheta_0\cos\vartheta_0 \\ 0 & a & -b\cos\vartheta_0 & b\omega_0\sin\vartheta_0 & -b\omega_0\vartheta_0\sin\vartheta_0 \\ -e\sin\vartheta_0 & e\cos\vartheta_0 & d & -e\zeta & e\vartheta_0\zeta \\ 0 & 0 & \Delta t & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

kde

$$\zeta = \left(i_{\beta,0} \sin\vartheta_0 + i_{\alpha,0} \cos\vartheta_0\right).$$

Matici B_t derivací $f(x_t, u_t)$ dle vstupů u_t lze volit konstantní a časově nezávislou ve tvaru

$$B = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & c \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

protože funkce f je ve vstupech u lineární.

Substituce kvůli požadovaným otáčkám

Jak již bylo zmíněno, při požadavku na nenulové referenční otáčky je třeba provést substituci a zavést novou stavovou veličinu ψ. V důsledku této substituce 3.3 se rovnice (1.20) změní na

$$\begin{aligned} i_{\alpha,t+1} &= a i_{\alpha,t} + b\left(\psi_t + \overline{\omega}_t\right)\sin\vartheta_t + c u_{\alpha,t}, \\ i_{\beta,t+1} &= a i_{\beta,t} - b\left(\psi_t + \overline{\omega}_t\right)\cos\vartheta_t + c u_{\beta,t}, \\ \psi_{t+1} &= d\psi_t + e\left(i_{b,t}\cos\vartheta_t - i_{\alpha,t}\sin\vartheta_t\right), \\ \vartheta_{t+1} &= \vartheta_t + \Delta t\left(\psi_t + \overline{\omega}_t\right), \end{aligned} \tag{3.8}$$

předpokládáme-li, že pro pro požadované otáčky $\overline{\omega}$ přibližně platí $\overline{\omega}_{t+1} \approx d\overline{\omega}_t$.

Derivováním těchto rovnic dle nového (substituovaného) stavu $(i_{\alpha,t}, i_{\beta,t}, \psi_t, \vartheta_t)^T$ získáme matici

$$\tilde{A}_t = \begin{bmatrix} a & 0 & b\sin\vartheta_t & b\left(\psi_t + \overline{\omega}_t\right)\cos\vartheta_t \\ 0 & a & -b\cos\vartheta_t & b\left(\psi_t + \overline{\omega}_t\right)\sin\vartheta_t \\ -e\sin\vartheta_t & e\cos\vartheta_t & d & -e\left(i_{\beta,t}\sin\vartheta_t + i_{\alpha,t}\cos\vartheta_t\right) \\ 0 & 0 & \Delta t & 1 \end{bmatrix},$$

která je hodnotově stejná s maticí A_t získanou v části 3.2 týkající se EKF na základě původního nesubstituovaného stavu (to jest s $x^{(3)} = \omega$).

Konstantní člen $\gamma = f\left(x_0\right) - A_t x_0$ je však jiný a závisí na hodnotě $\overline{\omega}_t$, která do něj vstupuje jako časově proměnný parametr:

$$\gamma \quad = \quad \begin{pmatrix} -b\omega_0\vartheta_0\cos\vartheta_0 + b\overline{\omega}_t\sin\vartheta_0 \\ -b\omega_0\vartheta_0\sin\vartheta_0 - b\overline{\omega}_t\cos\vartheta_0 \\ e\vartheta_0\left(i_{\beta,0}\sin\vartheta_0 + i_{\alpha,0}\cos\vartheta_0\right) \\ \Delta t\overline{\omega}_t \end{pmatrix}.$$

Výsledná matice $\overline{A}_t$ je pak ve tvaru

$$\begin{bmatrix} a & 0 & b\sin\vartheta_0 & b\omega_0\cos\vartheta_0 & -b\omega_0\vartheta_0\cos\vartheta_0 + b\overline{\omega}_t\sin\vartheta_0 \\ 0 & a & -b\cos\vartheta_0 & b\omega_0\sin\vartheta_0 & -b\omega_0\vartheta_0\sin\vartheta_0 - b\overline{\omega}_t\cos\vartheta_0 \\ -e\sin\vartheta_0 & e\cos\vartheta_0 & d & -e\zeta & e\vartheta_0\zeta \\ 0 & 0 & \Delta t & 1 & \Delta t\overline{\omega}_t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

kde

$$\zeta = \left(i_{\beta,0}\sin\vartheta_0 + i_{\alpha,0}\cos\vartheta_0\right).$$

Různé indukčnosti

Matice $\overline{A}_t$ v případě uvažování různých indukčností L_d a L_q má, obdobně jako matice pro EKF v tomto případě, relativně komplikovaný zápis. Z tohoto důvodu opět nebude uvedena zde v textu, ale je zařazena do přílohy. Navíc je zde změna i v matici B_t, která je nyní závislá na čase. Tuto matici lze opět nalézt v příloze.

3.4.3 Redukovaný LQ regulátor v $\alpha - \beta$

Myšlenka redukovaného modelu již byla popsána pro rozšířený Kalmanův filtr, viz odstavec 3.2.3. Řízení je však redukovaný model komplikovanější, protože ve funkci popisující vývoj systému explicitně nevystupuje řízení u_t. Je tedy třeba vhodným způsobem tento problém vyřešit. Jednou z možností je zřetězení dvou LQ regulátorů. V prvním kroku považovat za řízení proudy $i_{\alpha,\beta}$, a tedy tento první regulátor na výstupu generuje požadované proudy $\bar{i}_{\alpha,\beta}$. Druhý regulátor pak na základě rovnic pro vývoj proudů a referenčních hodnot proudů $\bar{i}_{\alpha,\beta}$ nalezl vlastní řízení $u_{\alpha,\beta}$.

Jak bylo zmíněno, ve funkci $f(x_t, y_t)$ dané druhými dvěma rovnicemi (1.20) explicitně nevystupuje řízení u_t, je třeba zvolit trochu odlišný přístup, než pro plný model. Řízení budeme navrhovat ve dvou krocích. V prvním kroku budeme předpokládat, že vstupem jsou proudy $i_{\alpha\beta}$ a lineárně kvadratický algoritmus bude na svém výstupu produkovat požadované hodnoty těchto proudů $\bar{i}_{\alpha\beta}$. V dalším kroku druhý lineárně kvadratický algoritmus na základě požadovaných proudů $\bar{i}_{\alpha\beta}$ již navrhne hodnotu napětí $u_{\alpha\beta}$.

Dále provedeme ještě drobné zjednodušení a funkci $f(x_t, y_t)$ rozdělíme na dvě části

$$f(x_t, y_t) = \begin{pmatrix} d\omega_t \\ \vartheta_t + \Delta t \omega_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e\left(i_{b,t}\cos\vartheta_t - i_{\alpha,t}\sin\vartheta_t\right) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Matici A_t pak položíme rovnou první , lineární, části systému

$$A = \begin{bmatrix} d & 0 \\ \Delta t & 1 \end{bmatrix}$$

a matici B_t pak získáme linearizací druhé části jako

$$B_t = \begin{bmatrix} -e\sin\vartheta_t & e\cos\vartheta_t \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Tento postup neodpovídá přesně postupu odvození derivací užitému pro plný stav. Jeho výhodou však je, že již není třeba přidávat konstantní členy jako důsledek linearizace. Snadněji se také zahrne požadavek na nenulovou referenční hodnotu $\overline{\omega}$. Následně je užito lineárně kvadratického algoritmu s výše popsanými maticemi.

Ve druhém kroku pak na základě referenčních hodnot proudů $\bar{i}_{\alpha\beta}$ nalezneme požadované řízení $u_{\alpha\beta}$. Využijeme k tomu rovnic pro funkci $h(x_t, y_t, u_t)$ dané prvními dvěma rovnicemi (1.20)

$$h(x_t, y_t, u_t) = \begin{pmatrix} ai_{\alpha,t} + b\omega_t\sin\vartheta_t + cu_{\alpha,t} \\ ai_{\beta,t} - b\omega_t\cos\vartheta_t + cu_{\beta,t} \end{pmatrix},$$

které jsou v proudech $i_{\alpha\beta}$ i napětích $u_{\alpha\beta}$ lineární a lze opět použít lineárně kvadratický algoritmus. Členy $b\omega_t\sin\vartheta_t$ a $-b\omega_t\cos\vartheta_t$ zde pak vystupují jako konstanty a projeví se jako korekce vynásobená konstantou $\frac{1}{c}$ odečtená od výsledku.

3.4.4 LQ regulátor v $d-q$

Postup je analogický jako v případě plného modelu pro $\alpha-\beta$ souřadnice, vyjdeme však ze soustavy rovnic (1.22). Tento tvar rovnic je z hlediska linearizace daleko příznivější, protože jedinými nelineárními členy jsou $\pm\Delta t \cdot i_{q,d}\omega$.

Dále je třeba upozornit na důležitý detail. Na první pohled by se mohlo zdát, že jsme z rovnic kompletně odstranili závislost na úhlu natočení ϑ a nepotřebujeme jej tedy znát. To však není pravda, závislost tam stále je, i když skrytá. Měření výstupu i poskytování vstupu do systému probíhá v souřadné soustavě $\alpha-\beta$, když navrhujeme řízení v soustavě $d-q$ je třeba provést transformaci (1.1) a pak inverzní transformaci (1.2) zpět a obě závisí právě na úhlu natočení ϑ.

Ztrátovou funkci budeme uvažovat stejnou jako v předchozím případě pro $\alpha - \beta$ a stav rovnou rozšíříme o konstantu na $x_t = (i_{d,t}, i_{q,t}, \psi_t, \vartheta_t, 1)$. Vektor řízení je $u_t = (u_{d,t}, u_{q,t})$. Upravená matice A_t se zahrnutím konstantních členů v důsledku linearizace a nenulových referenčních otáček a matice B jsou

$$A_t = \begin{bmatrix} a & \Delta t \cdot \omega & \Delta t \cdot i_q & 0 & -\Delta t \cdot i_q\,(\omega - \overline{\omega}) \\ -\Delta t \cdot \omega & a & -\Delta t \cdot i_d - b & 0 & \Delta t \cdot i_d\,(\omega - \overline{\omega}) - b\overline{\omega} \\ 0 & e & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta t & 1 & \Delta t\overline{\omega} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & c \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Konstantní verze

Jak bylo uvedeno výše, jedinými nelineárními členy rovic (1.22) jsou $\pm\Delta t \cdot i_{q,d}\omega$. Byla tedy zkoumána i možnost zanedbání těchto členů, kdy pak výsledné rovnice byly zcela lineární. To přináší značnou výhodu, protože by bylo možno celý algoritmus LQ regulátoru předpočítat a následný výpočet řídícího zásahu značně usnadnit. Možno zanedbání zmiňovaných členů zanedbat a jeho důsledky byly ponechány k experimentálnímu ověření. Matice systému v tomto případě jsou:

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & -b & 0 & -b\overline{\omega} \\ 0 & e & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta t & 1 & \Delta t\overline{\omega} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & c \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

3.5 Hyperstav

Jak již bylo uvedeno v části 2.3.1, hlavní myšlenka využití hyperstavu spočívá v aplikaci EKF v jistém smyslu dvakrát. To umožňuje získat kromě odhadu samotného stavu i odhad jeho kovarianční matice. Proč je právě znalost kovarianční matice pro konkrétní uvažovaný systém PMSM výhodná bude nejdříve ukázáno pomocí Bellmanovy funkce. Pak již bude následovat odvození samotného algoritmu založeného na hyperstavu.

3.5.1 Bellmanova funkce pro PMSM

Cílem řídícího algoritmu je minimalizovat ztrátovou funkci uvažovanou ve tvaru (2.10). Klasickým postupem pro nalezení optimálního řešení této úlohy je užití Bellmanovy funkce a algoritmu dynamického programování jak bylo popsáno v odstavci 2.2.1.

V koncovém čase T položíme

$$V_T\left(x_T\right) = 0 \tag{3.9}$$

a dále počítáme zpět v čase

$$V_{t-1}\left(x_{t-1}, u_{t-1}\right) = \min_{u_{t-1} \in U_{t-1}} \mathbf{E}\left\{x_t^T Q_t x_t + u_t^T R_t u_t + V_t\left(x_t, u_t\right) \mid \mathcal{I}_t\right\}, \tag{3.10}$$

pro t od $T-1$ do 1, kde střední hodnota je podmíněna informačním vektorem $\mathcal{I}_t$, který reprezentuje současně dostupnou informaci o systému zahrnující všechna měření a řídící vstupy do času t.

Uvažovanou kvadratickou ztrátu za jeden časový krok

$$x_t^T Q_t x_t + u_t^T R_t u_t,$$

pří konkrétní volbě matice Q ve tvaru (3.4) a zavedení substituce 3.3 přejde na

$$q\left(x_t^{(3)} - \overline{\omega}_t\right)^2 + u_t^T R_t u_t,$$

kde horní index v závorce značí složku vektoru. Pak je možno rovnici (3.10) dále zjednodušit

$$\begin{aligned}
V_{t-1}\left(x_{t-1}, u_{t-1}\right) &= \min_{u_{t-1}} \mathbf{E}\left\{x_t^T Q_t x_t + u_t^T R_t u_t + V_t\left(x_t, u_t\right) \mid \mathcal{I}_t\right\} \\
&= \min_{u_{t-1}} \left(\mathbf{E}\left\{q\left(x_t^{(3)} - \overline{\omega}_t\right)^2\right\} + \mathbf{E}\left\{u_t^T R_t u_t + V_t\left(x_t, u_t\right) \mid \mathcal{I}_t\right\}\right) \\
&= \min_{u_{t-1}} \left(q\left(\mathbf{E}\left\{\left(x_t^{(3)}\right)^2\right\} + \mathbf{E}\left\{\overline{\omega}_t^2\right\} + \mathbf{E}\left\{2x_t^{(3)}\overline{\omega}_t\right\}\right) + \mathbf{E}\left\{u_t^T R_t u_t + V_t\left(x_t, u_t\right) \mid \mathcal{I}_t\right\}\right) \\
&= \min_{u_{t-1}} \left(q\left(\left(\hat{x}_t^{(3)}\right)^2 + \mathrm{Var}\left(x_t^{(3)}\right) + \overline{\omega}_t^2 + 2\hat{x}_t^{(3)}\overline{\omega}_t\right) + \mathbf{E}\left\{u_t^T R_t u_t + V_t\left(x_t, u_t\right) \mid \mathcal{I}_t\right\}\right) \\
&= \min_{u_{t-1}} \left(q\left(\hat{x}_t^{(3)} - \overline{\omega}_t\right) + q\mathrm{Var}\left(x_t^{(3)}\right) + \mathbf{E}\left\{u_t^T R_t u_t + V_t\left(x_t, u_t\right) \mid \mathcal{I}_t\right\}\right),
\end{aligned} \tag{3.11}$$

kde $\hat{x}$ označuje střední hodnotu x a dále jsme využili vztahu $\mathrm{Var}\left(x\right) = \mathbf{E}\left\{x^2\right\} - \left(\mathbf{E}\left\{x\right\}\right)^2$ a toho, že $\overline{\omega}_t$ je známý parametr a tedy je pro výpočet střední hodnoty konstantou. Následně můžeme ve výpočtu Bellmanovy funkce V v rovnici (3.10) náhodnou veličinu x_t nahradit její střední hodnotou $\hat{x}_t$, když navíc zahrneme do rovnice varianci třetí složky x_t, to jest varianci otáček stroje.

3.5.2 Redukovaný model

Následující algoritmus využívající hyperstav je praktickou realizací postupu nastíněného v odstavci 2.3.1. Jedná se o analogii s LQG popsaným v předchozích částech, s tím rozdílem, že místo stavu je aplikován právě na hyperstav. Protože tímto přístupem již značně

narůstá dimensionalita úlohy je z výpočetních důvodů výhodnější užití redukovaného modelu, i přes komplikace, které způsobuje při řízení.

Vyjdeme z redukovaného stavu

$$x_t = (\omega_t, \vartheta_t)^T$$

a na něj formálně aplikujeme EKF. Tím získáme, kromě odhadu stavu x_t i odhad jeho kovariance v podobě matice

$$P = \begin{bmatrix} P_\omega & P_{\omega\vartheta} \\ P_{\omega\vartheta} & P_\vartheta \end{bmatrix}$$

a současně rovnice EKF (2.7) a (2.8) představují předpis její výpočet. Z důvodu jednoduššího zápisu budou vynechány časové indexy t a místo nic je užit horní index $+$ pro hodnotu v následujícím čase $t+1$. Použité rovnice pro EKF jsou tedy ve tvaru

$$\begin{aligned} \overline{P} &= APA^T + V, \\ S &= C\overline{P}C^T + W, \\ K &= \overline{P}C^T S^{-1}, \\ P^+ &= (I - KC)\,\overline{P}. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Nyní definujeme *hyperstav* ξ_t v čase t jako

$$\xi_t = (\omega_t, \vartheta_t, P_\omega, P_{\omega\vartheta}, P_\vartheta)^T .$$

Na hyperstav následně aplikujeme algoritmus LQG viz část 2.5, podobně jako pro EKF a LQ regulátor pro redukovaný model jak bylo popsáno v předchozích částech 3.2.3 a 3.4.3. Větší problém však představuje nalezení matice derivací A_t, protože je třeba navíc derivovat maticové rovnice pro výpočet EKF (3.12) na stavu x. Jedním ze způsobů jak je to možné provést je derivovat každou z rovnic (3.12) dle jednotlivých složek ξ_i vektoru hyperstavu ξ_t:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{P}}{\partial \xi_i} &= \frac{\partial A}{\partial \xi_i} PA^T + A\frac{\partial P}{\partial \xi_i}A^T + AP\frac{\partial A^T}{\partial \xi_i}, \\ \frac{\partial S}{\partial \xi_i} &= \frac{\partial C}{\partial \xi_i}\overline{P}C^T + C\frac{\partial \overline{P}}{\partial \xi_i}C^T + C\overline{P}\frac{\partial C^T}{\partial \xi_i}, \\ \frac{\partial K}{\partial \xi_i} &= \frac{\partial \overline{P}}{\partial \xi_i}C^T S^{-1} + \overline{P}\frac{\partial C^T}{\partial \xi_i}S^{-1} - \overline{P}C^T S^{-1}\frac{\partial S}{\partial \xi_i}S^{-1}, \\ \frac{\partial P^+}{\partial \xi_i} &= \frac{\partial \overline{P}}{\partial \xi_i} - \frac{\partial K}{\partial \xi_i}C\overline{P} - K\frac{\partial C}{\partial \xi_i}\overline{P} - KC\frac{\partial \overline{P}}{\partial \xi_i}, \end{aligned} \tag{3.13}$$

kde $\frac{\partial}{\partial \xi_i}$ představuje zápis derivace dle i-té složky vektoru ξ a matice V a W uvažujeme jako konstanty v ξ. Matice linearizovaného vývoje hyperstavu A_{hyp} bude mít nyní blokový tvar

$$A_{hyp} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & 0 & 0 & 0 \\ \left(\frac{\partial P^+}{\partial \omega}\right)^{sl} & \left(\frac{\partial P^+}{\partial \vartheta}\right)^{sl} & \left(\frac{\partial P^+}{\partial P_\omega}\right)^{sl} & \left(\frac{\partial P^+}{\partial P_{\omega\vartheta}}\right)^{sl} & \left(\frac{\partial P^+}{\partial P_\vartheta}\right)^{sl} \end{bmatrix},$$

kde A_i představuje i-tý sloupec původní matice A_t viz (3.2), 0 označuje sloupec nul vhodné délky a parciální derivace P^+ dle složky ξ_i v závorce s horním indexem *sl*, tedy $\left(\frac{\partial P^+}{\partial \xi_i}\right)^{sl}$, je myšlena v tom smyslu, že po vypočtení příslušné derivace $\frac{\partial P^+}{\partial \xi_i}$ z rovnice (3.13) jsou z této matice vybrány 3 z jejích 4 prvků tvořící horní nebo dolní trojúhelník a zapsány ve smyslu tvorby vektoru hyperstavu do sloupce. Tedy matice

$$\frac{\partial P^+}{\partial \xi_i} = \begin{bmatrix} \frac{\partial P^+_{\omega}}{\partial \xi_i} & \frac{\partial P^+_{\omega\vartheta}}{\partial \xi_i} \\ \frac{\partial P^+_{\omega\vartheta}}{\partial \xi_i} & \frac{\partial P^+_{\vartheta}}{\partial \xi_i} \end{bmatrix}$$

je zapsána jako

$$\left(\frac{\partial P^+}{\partial \xi_i}\right)^{sl} = \begin{pmatrix} \frac{\partial P^+_{\omega}}{\partial \xi_i} & \frac{\partial P^+_{\omega\vartheta}}{\partial \xi_i} & \frac{\partial P^+_{\vartheta}}{\partial \xi_i} \end{pmatrix}^T.$$

Matici A_{hyp} vzniklou předchozím postupem již můžeme použít v algoritmu EKF pro hyperstav. Jako matici pozorování C_{hyp} použijeme původní matici C pouze doplněnou nulami na vhodný rozměr. Pro lineárně kvadratický regulátor platí opět totéž, co pro jednoduchý (tedy bez hyperstavu) a matici A_{hyp} je třeba rozšířit zahrnutím konstantních členů, dále je třeba ošetřit substitucí řízení (3.3) na nenulové požadované otáčky $\overline{\omega}$. Kvůli větší složitosti tohoto výpočtu bylo rozšíření matice A_{hyp} na matici $\overline{A}_{hyp}$ prováděno numericky, tedy konstantní člen $\gamma = f(\xi_0) - A_{hyp}\xi_0$ byl vždy vypočítán pro každý čas t. Protože uvažujeme redukovaný model je třeba dále užít zřetězení dvou LQ regulátorů, podobně jako v případě bez hyperstavu v odstavci 3.4.3.

Výhodou využití hyperstavu je, že máme k dispozici i odhady kovarianční matice P původního stavu a tedy je možno zahrnout do kritéria například penalizaci P_ω, která vystupuje v Bellmanově funkci viz vzorec (3.11).

3.5.3 Plný model

Analogicky lze postupovat i pro plný model, všechny odpovídající matice však budou větší, protože velikost hyperstavu narůstá řádově kvadraticky.

Pro stav

$$x_t = (i_{\alpha,t}, i_{\beta,t}, \omega_t, \vartheta_t)^T$$

vypočteme z rovnic (3.12) EKF kovarianční matici

$$P = \begin{bmatrix} P_5 & P_6 & P_8 & P_{11} \\ P_6 & P_7 & P_9 & P_{12} \\ P_8 & P_9 & P_{10} & P_{13} \\ P_{11} & P_{12} & P_{13} & P_{14} \end{bmatrix}$$

a definujeme *hyperstav* ξ_t v čase t jako

$$\xi_t = (i_{\alpha,t}, i_{\beta,t}, \omega_t, \vartheta_t, P_5, P_6, P_7, P_8, P_9, P_{10}, P_{11}, P_{12}, P_{13}, P_{14})^T.$$

Rovnice pro výpočet matice P, a tedy i jejích prvků P_i, jsou formálně shodné s rovnicemi (3.13) pro redukovaný model, pouze rozměry vystupujících matic jsou větší. Matice A_{hyp} je pak v blokovém tvaru

$$A_{hyp} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ \left(\frac{\partial P^+}{\partial \xi_i}\right)^{sl}_{i\in\{1\ldots14\}} & \end{bmatrix},$$

kde A značí původní matici A_t (3.1) pro EKF standardního plného stavu, 0 je nulová matice vhodného rozměru a zápis $\left(\frac{\partial P^+}{\partial \xi_i}\right)^{sl}$ má stejný význam jako v předchozím odstavci, jen vybírá trojúhelník z větší matice; tyto sloupcové vektory jsou pak po řadě, dle indexu i, zapsány do blokové matice A_{hyp}. Pro LQ regulátor je matici třeba rozšířit o konstantní člen $\gamma = f(\xi_0) - A_{hyp}\xi_0$, který byl opět počítán numericky pro každý čas t. Výhodou je opět dostupnost odhadu kovarianční matice P a oproti redukovanému modelu se zde navíc nevyskytují komplikace při návrhu řízení jako pro redukovaný model.

3.6 Bikriteriální metoda

Dalším z implementovaných algoritmů je jednoduchý duální návrh založený na *bikriteriální metodě*, viz 2.3.1. Její princip je ve stručnosti takový, že nejdříve je nalezeno opatrné řízení. Následně je v jeho okolí hledáno optimální buzení. Tohoto postupu se ale budeme držet jen částečně.

Nalezení *opatrného řízení*, které se pod tímto pojmem obvykle rozumí není v případě zde uvažovaného systému snadné. Proto místo něj využijeme některé standardní řízení, například vektorové založené na PI nebo LQ regulátorech. Toto není z hlediska bikriteriální metody korektní, zde uvažovaný postup je ale myšlen jako jednoduchý návrh a je pouze jejím jistým přiblížením.

Nyní kolem takto nalezeného řízení, označme $\tilde{u}$, stanovíme okolí, ve kterém se budeme snažit minimalizovat ztrátu pro optimální buzení. Okolí uvažujeme jako dvourozměrný interval popsaný parametrem ε ve tvaru $\langle \tilde{u}_d - \varepsilon_d, \tilde{u}_d + \varepsilon_d\rangle \times \langle \tilde{u}_q - \varepsilon_q, \tilde{u}_q + \varepsilon_q\rangle$. Pro odhadování stavu je užit opět rozšířený Kalmanův filtr.

3.6.1 Základní verze

Velikost zpětné elektromotorické síly, na základě které jsou odhadovány mechanické veličiny, je přímo úměrná otáčkám a tedy čím jsou vyšší otáčky, tím získáváme lepší odhad těchto veličin. Můžeme tedy uvažovat, že optimální buzení pro PMSM je takové, které se snaží maximalizovat otáčky ω, nebo přesněji jejich absolutní hodnotu.

Při maximalizaci otáček vyjdeme z rovnic (1.22), kde do třetí rovnice dosadíme z prvních dvou

$$\omega_{t+1} = d\omega_t + e\left(ai_{q,t-1} - \Delta t\left(ai_{d,t-2} + \Delta t \cdot i_{q,t-2}\omega_{t-2} + cu_{d,t-2}\right)\omega_{t-1} - b\omega_{t-1} + cu_{q,t-1}\right). \tag{3.14}$$

Dosazovat by šlo samozřejmě dále, ale již teď je zřejmé, jak volit řídící zásahy u_d a u_q: Chceme maximalizovat $|\omega|$, budeme tedy volit řízení u na okraji intervalu kolem $\tilde{u}$. Je

třeba rozlišit kladné a záporné otáčky, z rovnice (3.14) získáváme pro u_q volbu stejného znaménka jako pro ω a pro u_d znaménko opačné. Výsledné řízení je tedy

$$\begin{aligned} u_d &= \tilde{u}_d - \varepsilon_d \operatorname{sign} \omega, \\ u_q &= \tilde{u}_q + \varepsilon_q \operatorname{sign} \omega. \end{aligned} \tag{3.15}$$

3.6.2 Časový posun hodnot

Předchozí návrh byl poměrně přímočarým vyvozením rovnic (3.15) pro řízení z rovnice pro otáčky (3.14) a nebyly při něm respektovány správné časy jednotlivých veličin. Chceme-li respektovat správný časový posun uvažovaných veličin, je třeba rovnice (3.15) přepsat vzhledem k rovnice (3.14) do tvaru

$$\begin{aligned} u_{d,t} &= \tilde{u}_{d,t} - \varepsilon_d \operatorname{sign} \omega_{t+3}, \\ u_{q,t} &= \tilde{u}_{q,t} + \varepsilon_q \operatorname{sign} \omega_{t+2}. \end{aligned}$$

Zde vystupující veličiny ω_{t+2} a ω_{t+3} lze získat, podobně jako rovnici (3.14), dosazováním do třetí rovnice z ostatních v soustavě (1.22). Jejich tvar je pak následující

$$\begin{aligned} \omega_{t+2} &= \left(d^2 - be\right)\omega_t + (a+d)\, e i_{q,t} - e\Delta t \cdot i_{d,t}\omega_t + ceu_{q,t}, \\ \omega_{t+3} &= d\omega_{t+2} + ceu_{q,t+1} - be\,(a+d)\,\omega_t + e\left(a^2 - be\right) i_{q,t} + aceu_{q,t} - \\ &- e\Delta t\,(a+ad)\, i_{d,t}\omega_t - ae^2\Delta t \cdot i_{d,t} i_{q,t} - ed\,(\Delta t)^2\, i_{q,t}\omega_t^2 - e^2\,(\Delta t)^2\, i_{q,t}^2\omega_t - \\ &- cde\Delta t \cdot \omega_t u_{d,t} - ce^2\Delta t \cdot i_{q,t} u_{d,t}. \end{aligned}$$

Výpočet řídících zásahů pak probíhá v následujícím pořadí:

Nejdříve je vypočtena pomocná veličina

$$\phi = \left(d^2 - be\right)\omega_t + (a+d)\, e i_{q,t} - e\Delta t i_{d,t}\omega_t$$

a následně řídící zásah v ose q

$$u_{q,t} = \tilde{u}_{q,t} + \varepsilon_q \operatorname{sign} \phi.$$

To umožní výpočet druhé pomocné veličiny

$$\begin{aligned} \zeta &= d\phi + aceu_{q,t} - e\,(ab + bd + a\Delta t\,(1+d)\, i_{d,t})\,\omega_t + \\ &+ e\left(a^2 - be - ae\Delta t \cdot i_{d,t}\right) i_{q,t} - e\,(\Delta t)^2\,(d\omega_t + ei_{q,t})\, i_{q,t}\omega_t. \end{aligned}$$

Na závěr je vypočten řídící zásah v ose d

$$u_{d,t} = \tilde{u}_{d,t} - \varepsilon_d \operatorname{sign} \zeta.$$

Ještě je třeba zmínit, že bylo zanedbáno budoucí řízení $u_{q,t+1}$, které není známe a předchozím výpočtu je předpokládáno, že $u_{q,t+1} = 0$. Lepších výsledků by mohlo být dosaženo užitím předpokladu $u_{q,t+1} = u_{q,t}$, pak by se rovnice pro výpočet výsledného řízení změnily na $u_{d,t} = \tilde{u}_{d,t} - \varepsilon_d \operatorname{sign} \zeta'$, kde $\zeta' = \zeta + ceu_{q,t+1}$.

3.6.3 Výběr buzení na základě výpočtu více EKF

Předchozí dvě verze bikriteriální metody byly založeny na myšlence, že optimální buzení je takové, které zvyšuje otáčky. Velikosti otáček je totiž úměrná zpětná elektromotorická síla, ze které jsou následně odhadovány hodnoty neměřených stavových veličin. Tento v jistém smyslu „intuitivní“ přístup k nalezení optimálního buzení by však bylo vhodnější nahradit jiným, teoreticky lépe podloženým.

Z tohoto důvodu byla volena verze bikriteriální metody, kdy se z dané množiny budících zásahů vybírá takový, který minimalizuje varianci odhadovaných mechanických veličin. Hodnoty těchto variancí byly získávány užitím redukované verze rozšířeného Kalmanova filtru, který byl napočítáván pro každý možný budící zásah zvlášť. Množina budících zásahů byla konkrétně uvažována závislá na parametru ε, zapsána v souřadné soustavě $\alpha - \beta$ a obsahující pět prvků.

Řídící zásahy pak byly v následujícím tvaru:

$$\begin{aligned} u_\alpha &= \tilde{u}_\alpha + \mu_\alpha^i, \\ u_\beta &= \tilde{u}_\beta + \mu_\beta^i, \end{aligned}$$

kde $\tilde{u}$ je řídící zásah navržený klasickým vektorovým řízením a μ je množina dvojic

$$\mu = \{(-\varepsilon, -\varepsilon), (-\varepsilon, \varepsilon), (\varepsilon, -\varepsilon), (\varepsilon, \varepsilon), (0, 0)\}.$$

Z těchto dvojic je vybrána jediná, označena i, pro kterou je dosaženo v následujícím časovém kroku nejmenší variance veličin ω a ϑ. Nevýhodou této verze bikriteriální metody oproti předchozím dvěma je větší výpočetní složitost, kdy je třeba počítat navíc pět redukovaných EKF.

3.6.4 Konstantní signál v ose d

Další verze bikriteriální metody, která bude dále experimentálně zkoumána je přidání konstantního signálu do osy d, tedy

$$\begin{aligned} u_d &= \tilde{u}_d + \varepsilon, \\ u_q &= \tilde{u}_q, \end{aligned}$$

kde ε je vhodně velká konstanta.

Možnost užití této verze vyvstala při testování vlivu volby parametrů ε_d a ε_q pro standardní verzi bikriteriální metody, kdy na základě experimentů byl vliv parametru ε_d vyhodnocen jako významější. Dále při analyzování chování bikriteriální metody založené na výpočtu více EKF bylo shledáno, že nejvýznamnější vliv na varianci mechanických veličin má pravý horní prvek matice A_t redukovaného modelu (3.2), který však odpovídá na základě transformace (1.1) proudu v ose d

$$A_t^{(1,2)} = -e\left(i_\beta \sin\vartheta + i_\alpha \cos\vartheta\right) = -e i_d.$$

Právě přidání konstantního zásahu k řízení v ose d může zvýšit proud v této ose a vést ke snížení variance neměřených veličin.

Zmiňovaný popis samozřejmě není odvozením nebo zdůvodněním funkčnosti této verze bikriteriální metody, jedná se pouze o nastínění příčin, které vedly k jejímu uvažování. Skutečné vlastnosti této metody jsou ponechány k experimentálnímu ověření v následující kapitole.

3.7 Vysokofrekvenční injektáž

V této části následuje popis návrhu regulátoru využívajícího k odhadu polohy vysokofrekvenční injektáže. Základní myšlenka je následující: Protože se pomocí techniky injektáží se nepodařilo získat dostatečně kvalitní odhad polohy ϑ, aby byl použit přímo pro návrh řízení, je užíván současně i EKF, kdy odhad ϑ z injektáže slouží jako další zdroj informace pro EKF. Kompletní odhad stavu pro návrh řízení pak poskytuje EKF a řídící zásahy jsou následně generovány vektorovým řízením s LQ regulátorem.

Celý proces pak probíhá tak, že k řízení navrženému LQ regulátorem je přidáván vysokofrekvenční signál do estimované d osy. Toto řízení je přivedeno na vstup PMSM a na jeho výstupu jsou měřeny proudy. Z proudu v estimované q ose je určena hodnota θ jako rozdíl skutečné polohy ϑ a jejího odhadu $\hat{\vartheta}$ pomocí násobení původním vysokofrekvenčním signálem a aplikací low-pass filtru. Následně je z θ a starého odhadu $\hat{\vartheta}$ získána hodnota ϑ a spolu s výstupy PMSM y_α a y_β dodána rozšířenému Kalmanovu filtru, který pak poskytuje odhad všech stavových veličin. Ty jsou použity pro návrh řízení v dalším kroku.

Pro návrh EKF předpokládáme výstup systému ve tvaru $y_t = (i_{\alpha,t}, i_{\beta,t}, \vartheta)^T$. Dále je již větší část zde používaných algoritmů (LQ, EKF) popsána v předchozích částech textu, proto zde uvedeme jen případné změny. Ty jsou pouze v maticích C a R pro EKF:

$$\overline{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\overline{R} = \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & r_\vartheta \end{bmatrix},$$

kde $\overline{C}$ a $\overline{R}$ představují upravené matice a R je matice původní, 0 v $\overline{R}$ pak představuje nulový blok vhodné velikosti.

Zpracování signálu

Jak bylo uvedeno v části 1.3.8, je pro správnou funkci injektáží nutné splnit podmínku $L_d \neq L_q$, platnost tohoto předpokladu byla stanovena v odstavci 3.1.

Vysokofrekvenční signál užitý pro injektáž byl zvolen jako kosinový signál o amplitudě A_{inj} a frekvenci ω_{inj}. Volba velikosti amplitudy je problematickou záležitostí. Obecně platí, že větší amplituda umožní snadnější zpracování signálu, především z důvodu většího odstupu signálu od šumu. Naopak ale větší amplituda způsobuje i větší rušení v samotném PMSM. Obvykle je v injektážních technikách užívána amplituda menší, řádově v jednotkách voltů. Dalším problémem může být, že zde předkládaný návrh am-

plitudu nijak neomezuje s rostoucími otáčkami, stále je tedy injektován signál o stejné amplitudě. To by se mohlo negativně projevit při vyšších otáčkách.

Asi největší komplikací tohoto přístupu, ale i injektáží obecně je vhodný postup demodulace. Používá se k k tomu obecně digitálních filtrů, jejichž návrh je netriviální záležitostí a může mít značný dopad na kvalitu výsledného odhadu ϑ. Zde používaný filtr byl vygenerován programem Matlab za užití interaktivního návrhu *filterbuilder* z balíku *Signal Processing Toolbox*.

Informace o poloze rotoru je amplitudově modulovaná na nosné vysoké frekvenci v q složce měřeného proudu. Není však modulována přímo hodnota ϑ ale veličina

$$\frac{A_{inj}}{\omega_{inj}} \frac{L_q - L_d}{2L_d L_q} \sin 2\theta,$$

kde A_{inj} představuje amplitudu a ω_{inj} úhlovou frekvenci vysokofrekvenčního signálu, θ je chyba odhadu $\theta = \vartheta - \hat{\vartheta}$. Po získání této informace je tedy třeba ještě provést vydělení příslušnou konstantou a ideálně ještě funkci arcsin. Výpočet arcsin je však náročný a nedává příliš dobré výsledky z důvodu omezení na jeho definiční obor, proto je využita aproximace $\sin x \approx x$ pro malá x.

4 Experimenty

V této kapitole budou předloženy provedené simulace a jejich výsledky. Na tomto základě pak bude diskutován vliv konkrétního algoritmu na výslednou kvalitu řízení a jednotlivé algoritmy budou mezi sebou porovnány z různých hledisek. Na závěr bude rozebrána jejich vhodnost pro praktické aplikace.

4.1 Návrh simulací bezsenzorového řízení

Nejdříve je nutno uvést základní popis prováděných simulací. K simulování běhu skutečného zařízení PMSM bylo užito dvou kvalitativně rozdílných přístupů. Prvním, jednodušším, způsobem je simulování systému pouze na základě jeho rovnic. Pro tuto úlohu byl volen model PMSM (1.23) a navíc byl přidáván vzájemně nezávislý aditivní bílý Gaussovský šum, jak bylo popsáno v části 1.2.5. Střední hodnota šumu byla volena nulová a kovarianční matice pro šum v systému a šum měření byly v tomto pořadí

$$\begin{aligned} Q_{šum} &= \mathrm{diag}\begin{pmatrix} 1,3e-3 & 1,3e-3 & 5.0e-6 & 1.0e-10 \end{pmatrix}, \\ R_{šum} &= \mathrm{diag}\begin{pmatrix} 6,0e-4 & 6,0e-4 \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{4.1}$$

přičemž volba těchto hodnot vychází převážně z [41] a dále byly experimentálně poupraveny. Tento typ simulací bude dále v textu označován jako „*jednoduchý model*“.

Druhou užitou možností provádění simulací je využití realistického simulátoru [41]. Simulátor je založen na knihovně BDM a zohledňuje i složitější jevy napájecí elektroniky jako úbytky napětí a mrtvé časy. Hlavním rozdílem oproti simulacím založených na stochastickém modelu stroje je, že simulátor poskytuje chování, které daleko více odpovídá chování reálného zařízení. Dalším rozdílem pak je, že se snaží přesnějším výpočtem postihnout komplikované efekty odehrávající se v reálném stroji místo toho, aby je modeloval jako šum a je tedy ve své podstatě deterministický. Tento typ simulací pak bude dále v textu označován jako „*simulátor*“, naprostá většina provedených simulací v tomto textu je tohoto typu.

Dále je třeba uvést, že u všech uváděných algoritmů byl použit jako pozorovatel rozšířený Kalmanův filtr ve verzi pro plný model. V případě užití injektáží byl do tohoto pozorovatele navíc přidáván vstup z vyhodnocení injektovaného signálu a při užití hyperstavu byl EKF implementován v rozšířené verzi na celý hyperstav.

4.1.1 Parametry stroje

V obou typech výše zmíněných simulací byly použity následující parametry:

parametr	označení	hodnota
rezistance	R_s	0,28
izotropní indukčnost	L_s	0,003465
indukčnost v ose d	L_d	0,003119
indukčnost v ose q	L_q	0,003812
tok permanentních magnetů	ψ_{pm}	0,1989
Parkova konstanta	k_p	1,5
počet párů pólů	p_p	4
moment setrvačnosti rotoru	J	0,04
koeficient viskozity	B	0
zátěžný moment	T_L	0
vzorkovací perioda	Δt	0,000125

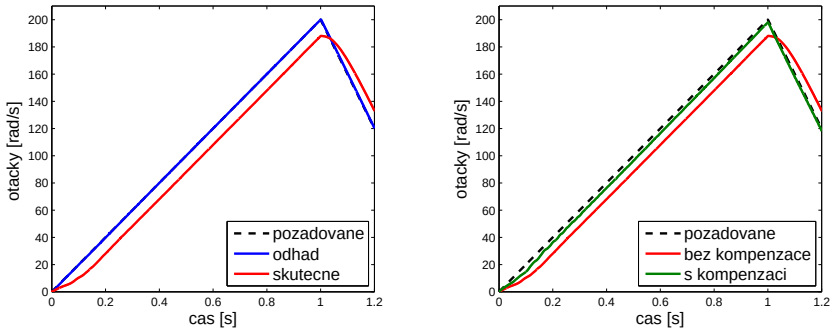
4.1.2 Kompenzace úbytků napětí

Jak již bylo zmíněno, používaný simulátor zahrnuje i složitější vlivy napájecí elektroniky. Jedním z těchto vlivů jsou i takzvané *úbytky napětí*. Problém těchto úbytků je stručně takový, že po napájecím zdroji požadujeme určité napětí, ale napájecí zdroj dodá napětí menší, proto také označení úbytky. Skutečná napětí však neměříme a předpokládáme, že požadované napětí se rovná skutečnému, viz část 3.1. Následně může docházet k chybám, protože reálná hodnota napětí ve stroji je menší, než navrhl řídící algoritmus a tento algoritmus se o tom navíc nedozví. Tato situace je zachycena na obrázku 4.1 vlevo, kde odhad určený na základě požadovaného napětí přesně sleduje referenční otáčky, ale skutečné otáčky jsou v důsledku úbytku napětí jiné.

Vhodným způsobem jak tento problém řešit, je úbytky napětí kompenzovat. Kompenzace používaná v této práci je velmi jednoduchá. Byla vytvořena na základě volt-ampérové charakteristiky stroje využité v simulátoru a je založena na předpokladu, že úbytek napětí je úměrný procházejícímu proudu. Kompenzace pak probíhá tak, že ze známé hodnoty proudu je vypočítán úbytek napětí pomocí po částech lineární aproximace volt-ampérové charakteristiky. O tento úbytek je následně zvýšena hodnota požadovaného řídícího napětí. Nevýhodami takového přístupu je, že užívaná kompenzace není zpětnovazební a dále je v podstatě nastavena na kompenzaci simulátoru a pro reálný stroj by bylo třeba vytvořit kompenzaci novou. Pozitivní vliv kompenzace je zachycen na obrázku 4.1 vpravo, kde je možné srovnat skutečné otáčky simulovaného běhu systému s a bez užití kompenzace.

4.1.3 Srovnávací kritéria

Jednotlivé algoritmy budou porovnány na základě několika kritérií. Hlavní z nich je, jak již bylo zmíněno v části 3.1 založeno na kvadrátu odchylky skutečných a požadovaných otáček. Toto kritérium v podstatě vystihuje míru shody mezi zadanými požadavky v podobě referenčního signálu a jejich skutečným naplněním. Výpočet součtu těchto kvadrátů odchylek však není vhodné přímo užít, protože je závislý na délce časového horizontu.



Obrázek 4.1: Vliv úbytků napětí a jejich kompenzace na otáčky. Na levém obrázku je zachycen negativní důsledek úbytků napětí, kdy se odhad kryje s požadovanou hodnotou, ale skutečnost je jiná. Na obrázku vpravo jsou pro srovnání zachyceny skutečné otáčky v případě bez kompenzace a pak při jejím užití.

Dále v textu tedy bude uvažováno normované verze takového součtu, která odpovídá střední kvadratické chybě za jeden časový krok.

Dalším posuzovacím kritériem pak bude složitost daného algoritmu, především v tom smyslu, jak by byla náročná jeho potenciální aplikace pro řízení skutečného stroje v reálném čase. Diskutována bude i přesnost jednotlivých algoritmů s jakou stanovují odhady stavových veličin.

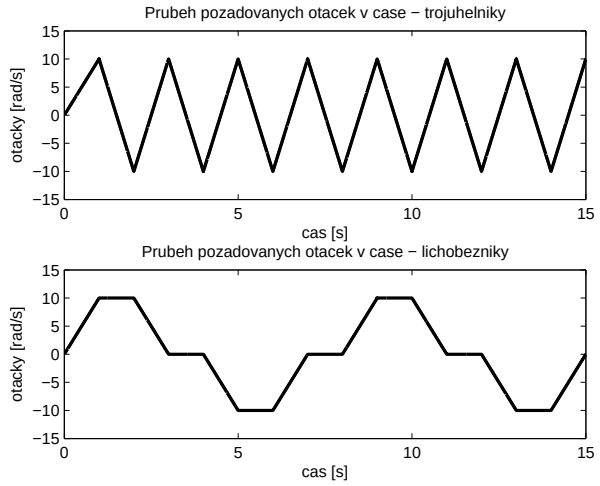
Časový horizont pro porovnání použitých metod bude obvykle volen v délce 15 s, případně pro posouzení počátečního chování systému kratší. Jako referenční signál bude sloužit několik testovacích profilů, v textu budou dále označovány jako:

- *nulové otáčky*: $\omega_{ref} \equiv 0$
- *nízké otáčky*: trojúhelníkový a lichoběžníkový profil s amplitudou 1
- *střední otáčky*: trojúhelníkový a lichoběžníkový profil s amplitudou 10
- *vysoké otáčky*: trojúhelníkový a lichoběžníkový profil s amplitudou 200

Rozdíl mezi trojúhelníkovým a lichoběžníkovým profilem je znázorněn na obrázku 4.2, kde je uvažována amplituda 10.

4.2 Výběr parametrů a zástupců jednotlivých metod

Protože jednotlivé algoritmy popsané v předchozí části připouštějí více různých implementací a různou volbu klíčových parametrů, je v této části provedeno jejich experimentální srovnání a následná volba reprezentativních zástupců.



Obrázek 4.2: Příklad profilů požadovaných otáček na časovém horizontu 15 s s amplitudou 10 rad/s: nahoře trojúhleníkový a dole lichoběžníkový profil.

4.2.1 Neduální LQ regulátor

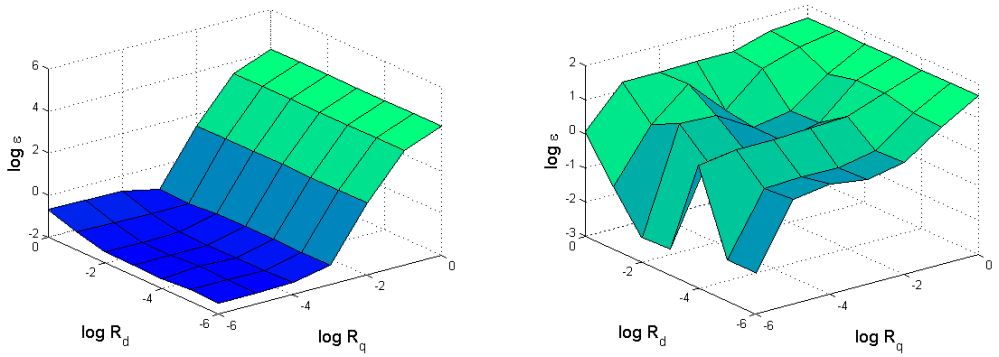
V části 3.4 byl popsán lineárně kvadratického regulátor pro PMSM. Některé jeho parametry však nebyly specifikovány. Navíc je možná celá řada implementací například dle volby ztrátové funkce nebo souřadného systému. V následujících odstavcích budou porovnány různé verze LQ regulátoru a bude z nich vybrán vhodný zástupce, který bude tuto „rodinu“ reprezentovat při srovnání s ostatními algoritmy, případně bude sloužit jako základ pro tvorbu algoritmů složitějších.

Vliv matice R

Nejdříve bude věnována pozornost volbě matice R představující penalizaci řídícího zásahu ve ztrátové funkci (2.10). Právě hodnoty této matice byly voleny experimentálně tak, aby bylo dosaženo co nejlepšího výsledného řízení ve smyslu minimální střední kvadratické chyby. Volba jednotlivých prvků matice R však nemá smysl sama o sobě a je třeba je volit relativně vzhledem k velikosti prvků matice Q. Ta má pouze jeden nenulový prvek q, který byl pro jednoduchost volen 1.

Matice R byla volena po vzoru popisu z odstavce 3.4.1 jako diagonální v souřadné soustavě $d-q$ a na výslednou matici R v soustavě $\alpha-\beta$ byla převáděna aplikací matice rotace, viz rovnice (3.7). Rozhodující tedy byla volba dvou diagonálních prvků R_d a R_q. Pro různé dvojice těchto prvků byly provedeny experimenty a vyhodnocena velikost střední kvadratické chyby. Jako příklad budou uvedeny dva takové experimenty: První na *jednoduchém modelu* pro referenční profil *vysoké otáčky – lichoběžník* a druhý pak na *simulátoru* s profilem *střední otáčky – lichoběžník*. Výsledek těchto experimentů je zobrazen na grafech v obrázku 4.3.

Hodnoty matice R, se kterými bylo dosaženo nejlepších výsledků ve smyslu minimální



Obrázek 4.3: Posouzení vlivu matice R na velikost střední kvadratické chyby. Vlevo je zachycen výsledek jednoduchého modelu při užití referenčního profilu vysoké otáčky – lichoběžník a vpravo pak výsledek ze simulátoru s profilem střední otáčky – lichoběžník. Všechny osy jsou logaritmické a označení ε reprezentuje střední kvadratickou chybu.

střední chyby, jsou v souřadné soustavě $d - q$:

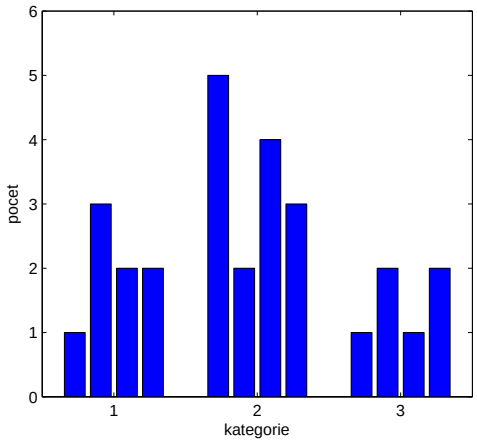
$$\begin{aligned} R_d &= 1,0e-3, \\ R_q &= 1,0e-6. \end{aligned}$$

Podobně je možno volit hodnoty i pro matici S penalizující přírůstky napětí, viz odstavec 3.4.1.

Vliv penalizace řídícího zásahu

Různé implementace lineárně kvadratického algoritmu lze získat v závislosti na volbě tvaru kvadratické ztrátové funkce, viz rovnice (3.6). Člen ztrátové funkce týkající se penalizace stavových veličin (dán maticí Q), případně jejich odchylky od požadované hodnoty zůstane nezměněn. Pro penalizaci řídících zásahů však budeme podrobněji diskutovat tři možnosti: Jednak je možné uvažovat pouze penalizaci hodnoty, tedy uvažovat člen s maticí R. Další možností je penalizovat jejich přírůstky, tedy užít člen s maticí S. Poslední zkoumanou možností je ponechat členy oba a penalizovat jak samotnou hodnotu, tak i její přírůstky.

Testování jednotlivých možností probíhalo na simulátoru i za použití jednoduchého modelu pro různá nastavení a referenční profily. Opět byla vyhodnocována střední kvadratická chyba, protože však tento ukazatel není vhodný pro srovnání za různých simulačních podmínek a na různých profilech, byly pouze zaznamenávány počty, kolikrát každá z možností penalizace dosáhla nejmenší chyby. Na grafu obrázek jsou pak tyto hodnoty zachyceny. Jako nejvýhodnější se ukázalo využití pouze penalizace přírůstků.



Obrázek 4.4: Vliv rozdílné penalizace řídícího zásahu. Na grafu jsou zachyceny počty, kdy daná kategorie dosáhla nejnižší střední chyby za různých experimentálních podmínek. Význam kategorií je následující: 1 – penalizace pouze hodnot napětí; 2 – penalizace pouze přírůstků napětí; 3 – penalizace hodnot i přírůstků napětí. Jednotlivé sloupečky v rámci kategorie představují různé experimentální podmínky.

Vliv souřadné soustavy

Poslední ze zkoumaných možností implementace LQ regulátoru je volba souřadné soustavy. V části 3.4 byly popsány matice pro implementaci v souřadné soustavě $\alpha - \beta$, ale i v $d - q$ a oba tyto případy zde budou uvažovány pro experimentální porovnání.

V souřadné soustavě $d - q$ jsou rovnice popisující PMSM lineární až na smíšené členy obsahující součin proudu a otáček. V případě zanedbání těchto členů by rovnice byly lineární zcela. To by přineslo značnou výhodu, protože by bylo možno celý algoritmus LQ regulátoru předpočítat a výpočet řídícího zásahu značně usnadnit. Zda je však možno zmiňované členy zanedbat a jaké to má důsledky bylo ponecháno k experimentálnímu ověření. Dalším z uvažovaných modelů pro srovnání je tedy předpočítaný LQ regulátor v $d - q$ souřadné soustavě s konstantní maticí A.

Dále bude ještě uvažován lineárně kvadratický regulátor v souřadné soustavě $\alpha - \beta$ pro různé indukčnosti v osách L_d a L_q. A jako referenční bude pro srovnání s ostatními uvažováno i klasické vektorové řízení založené na PI regulátorech.

Vzájemně srovnáváno tedy bylo následujících pět typů algoritmů vektorového řízení založeného na:

- PI regulátorech (PI)
- LQ regulátoru v souřadné soustavě $\alpha - \beta$ ($LQ_{\alpha-\beta}$)
- LQ regulátoru v souřadné soustavě $d - q$ (LQ_{d-q})

	nízké otáčky		*střední otáčky*		*vysoké otáčky*	
	trojúh.	*lichob.*	*trojúh.*	*lichob.*	*trojúh.*	*lichob.*
PI	$3,33e-1$	$4,44e0$	$2,37e0$	$1,56e0$	$3,02e0$	$1,14e1$
$LQ_{\alpha-\beta}$	$3,45e-2$	$2,96e-2$	$5,36e-1$	$1,15e-1$	$2,48e0$	$7,02e0$
LQ_{d-q}	$3,57e-2$	$2,98e-2$	$5,49e-1$	$1,14e-1$	$2,58e0$	$7,52e0$
LQ_{d-q} *konst.*	$2,87e-2$	$2,40e-2$	$3,92e-1$	$1,07e-1$	$1,58e1$	$9,26e0$
$LQ_{\alpha-\beta}$ L_{dq}	$8,53e-3$	$8,43e-3$	$1,34e-1$	$1,47e-2$	$1,62e1$	$1,16e1$

Tabulka 4.1: Hodnoty střední kvadratické chyby dosažené na simulátoru pro jednotlivé uvažované algoritmy při různých profilech referenčních otáček.

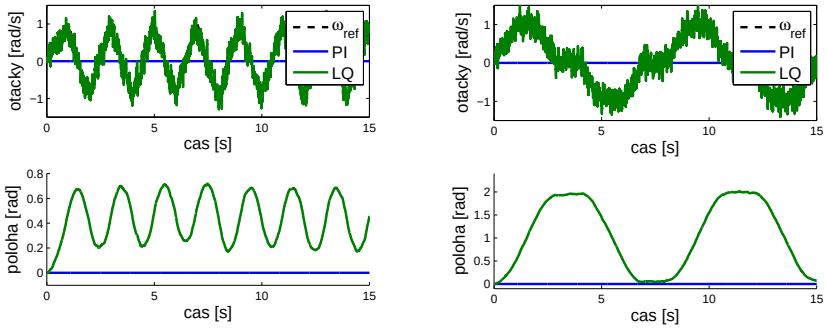
- LQ regulátoru v souřadné soustavě $d-q$ s konstantní maticí (LQ_{d-q} *konst.*)
- LQ regulátoru v souřadné soustavě $\alpha-\beta$ pro různé indukčnosti ($LQ_{\alpha-\beta}$ L_{dq})

kde v závorce je vždy uvedena zkratka, kterou bude daný algoritmus dále označován v tomto odstavci. Jednotlivé výše zmiňované metody pro řízení PMSM byly opět porovnávány především na základě dosažených středních kvadratických chyb, tyto hodnoty při užití simulátoru jsou uvedeny v tabulce 4.1. Hlavní rysy tohoto porovnání však lze vypozorovat již ze samotných průběhů simulací:

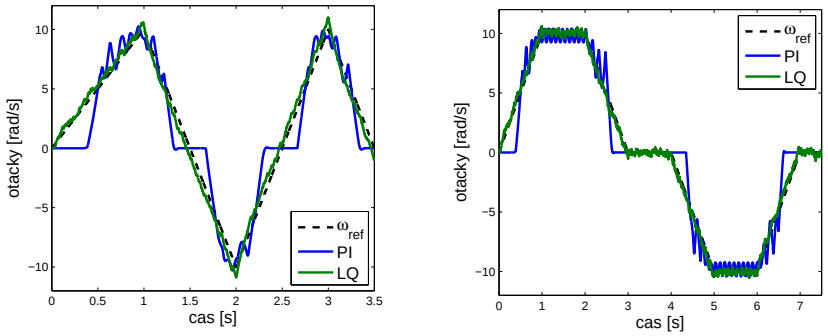
Především je třeba zmínit špatné chování algoritmu (PI) v blízkosti nulových otáček, kdy dochází k jistému „zpoždění“, než začne regulátor správně pracovat. Charakter tohoto jevu je možno detailněji posoudit na výstupech ze simulátoru na obrázku 4.5. Při nízkých požadovaných otáčkách (profil *nízké otáčky – trojúhelníky* a *lichoběžníky*) pak dojde k tomu, že algoritmus (PI) vůbec nezačne řídit, otáčky stroje jsou nulové a počáteční poloha rotoru zůstane nezměněna. Oproti tomu metody řízení založené na LQ regulátoru tímto nedostatkem netrpí a dokáží pracovat i s malou amplitudou referenčních otáček. Tento výsledek, tedy rozdíl mezi (PI) a obecně nějakým (LQ) algoritmem je zachycen na grafech v obrázku 4.5 a).

Zmiňované problematické chování (PI) však má další důsledky i při vyšších otáčkách, kdy vykazuje chyby při průchodu nulou. Jako průchod nulou je označován proces, kdy požadované otáčky mění znaménko a tedy stroj přechází z rotace jedním směrem na rotaci směrem opačným. Zřejmě tedy stroj musí na jistý časový okamžik zastavit a to může způsobovat problémy. Ty jsou patrné opět hlavně pro (PI) algoritmus a využití LQ regulátoru je umožňuje potlačit. Grafické srovnání je zachyceno na obrázku 4.5 b).

Dále lze rozdílné chování jednotlivých algoritmů pozorovat při vyšších otáčkách. Detaily výstupu ze simulátoru pro referenční profil *vysoké otáčky* jsou zachyceny na grafech v obrázku 4.6. Prvním pozorováním je relativně větší chyba, které se dopouští (LQ_{d-q} *konst.*), kdy v nejvyšším bodě profilu dosahuje přibližně chyby 5%, obrázek 4.6 a) vlevo. Horší výsledky této metody však lze při vyšších otáčkách očekávat, protože využívá nepřesného popisu stroje, kdy byly zanedbány členy úměrné právě otáčkám stroje a jejich vliv tedy s otáčkami roste. Dále lze pozorovat větší chybu u ($LQ_{\alpha-\beta}$ L_{dq}), ostatní použité algoritmy si pro vysoké hodnoty otáček počínají relativně dobře při srovnání na základě střední kvadratické chyby celkem vyrovnaně. Hodnoty této chyby shrnuje ta-

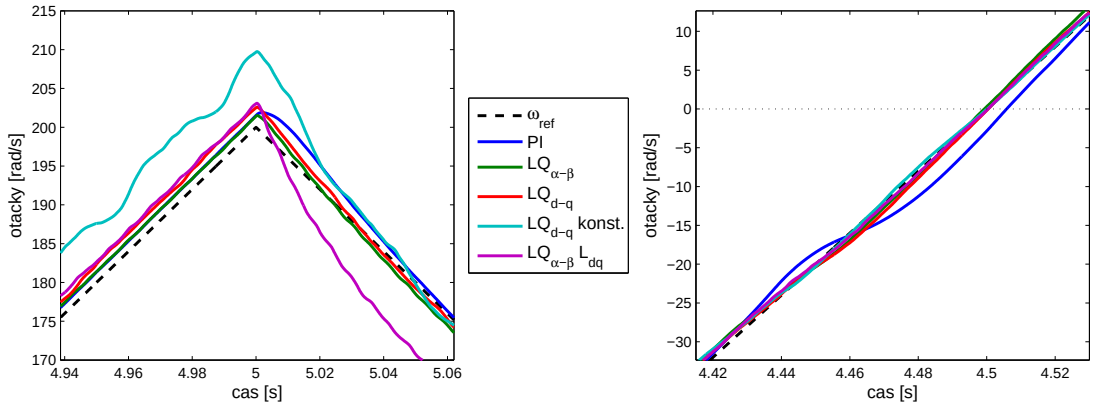


a) nízké požadované otáčky

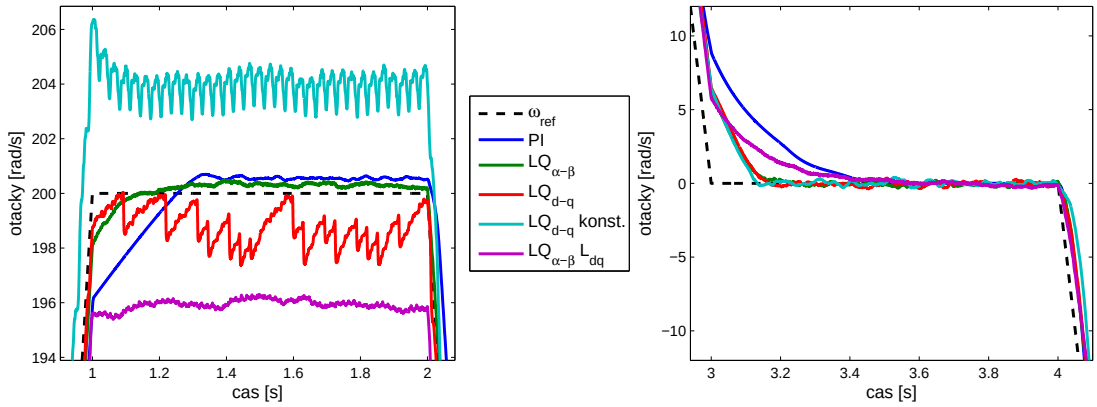


b) problematika průchodů nulou

Obrázek 4.5: Špatné chování algoritmu (PI) v blízkosti nulových otáček: Nahoře v části a) je zachycen průběh otáček a polohy, kdy obecně (LQ) algoritmus zvládne sledovat nízký profil referenčních otáčkek ω_{ref} a dobře se s nimi kryje, zatímco algoritmus (PI) je neaktivní. V části b) jsou zachyceny problematické průchody nulou, kdy se algoritmus (PI) dopouští v blízkosti nulových otáček nezanedbatelné chyby, zatímco průběh hodnot pro algoritmus (LQ) je relativně hladký.



a) vybrané detaily pro profil trojúhelník



b) vybrané detaily pro profil lichoběžník

Obrázek 4.6: Detaily chování jednotlivých algoritmů při použití simulátoru s profilem *vysoké otáčky*. Vlevo je vždy detail nejvyššího bodu profilu a vpravo pak detail průchodu nulou.

bulka 4.1. Na obrázku 4.6 a) vpravo je dále uveden detail průchodu nulou, kde se (PI) algoritmus opět dopouští větší chyby než ostatní algoritmy založené na LQ regulátoru.

Zajímavější porovnání užitých algoritmů nabízí grafy na obrázku 4.6 b), kde jsou zachyceny detaily výstupu simulátoru pro lichoběžníkový profil *vysoké otáčky*. Na tomto obrázku vlevo je zachyceno chování jednotlivých metod v nejvyšší části profilu. Největší chyby se v tomto případě dopouštějí podobně jako v předchozím případě pro trojúhelníkový profil algoritmy $(LQ_{d-q}\ konst.)$ a $(LQ_{\alpha-\beta}\ L_{dq})$. Jisté chyby se dopouští i (LQ_{d-q}) a nejlepší výsledky pak vykazuje $(LQ_{\alpha-\beta})$. V pravé části tohoto obrázku je znázorněn průchod nulovými otáčkami za stejných simulačních podmínek. Opět je zde patrné, že největší chyby se dopouští algoritmus (PI).

Na základě dosažených hodnot střední kvadratické chyby byl nakonec jako nejvhodnější zástupce vektorového řízení s lineárně kvadratickým regulátorem vybrán algorit-

mus ($LQ_{\alpha-\beta}$), který sice není vždy univerzálně nejlepší, ale zvládne poskytovat dobré výsledky pro všechny testované rychlosti.

Výběr zástupce

Na základě simulací jejichž výsledky byly shrnuty v předchozích odstavcích byl ze všech uvažovaných implementací lineárně kvadratického regulátoru vybrán jeden zástupce. Ten bude sloužit pro srovnání s ostatními uvažovanými algoritmy, ale i jako základ pro další rozšíření, například pomocí hyperstavu. Tímto zástupcem je algoritmus v souřadné soustavě $\alpha - \beta$ se ztrátovou funkcí penalizující pouze přírůstky napětí s penalizační maticí

$$S^{dq} = \begin{bmatrix} 1e-3 & \\ & 1e-6 \end{bmatrix}.$$

Při srovnání s ostatními algoritmy bude dále v textu označován jako LQ-CE.

Kromě výběru vhodné implementace LQ regulátoru však byla získána i další důležitá pozorování: Především se jedná o zjištění nedostatků vektorového řízení založeného na PI regulátorech v otáčkách blízko nuly, které využití LQ regulátoru odstraňuje.

Dalším zjištěním pak je potenciální možnost nasadit konstantní LQ regulátor, který je znatelně rychlejší, protože je možno jej díky jeho časové invarianci předpočítat. Jeho užití je obzvláště výhodné pro nízké otáčky, kde dosahuje dokonce menší střední kvadratické chyby než nekonstantní verze, viz tabulka 4.1. Nasazení tohoto regulátoru pro aplikace uvažující vyšší otáčky již příliš vhodná není.

Podobných výsledků dosáhl LQ regulátor v souřadné soustavě $\alpha - \beta$ při uvažování různých indukčností L_d a L_q. Střední kvadratická chyba je při jeho aplikaci v nízkých otáčkách nejnižší ze všech uvažovaných algoritmů, oproti tomu ve vyšších otáčkách je chyba relativně nejvyšší, viz tabulka 4.1. Navíc je třeba připočíst nutnost pracovat s velmi složitými rovnicemi pro popis PMSM v souřadné soustavě $\alpha - \beta$ pro různé indukčnosti L_d a L_q.

Zajímavé je srovnání s výše zmiňovaných výsledků s výzkumným úkolem [54]. V citované práci byl totiž experimentálně získán výsledek, že lepších výsledků je dosaženo použitím LQ regulátoru v souřadné soustavě $d - q$ a v soustavě $\alpha - \beta$ jsou výsledky znatelně horší. Tento zdánlivý rozpor je však způsoben tím, že v citovaném zdroji nebyla uvažována rozdílná penalizace řídících zásahů, případně jejich přírůstků, v osách $d - q$. Právě aplikování této rozdílné penalizace mělo největší vliv na zlepšení výsledků dosahovaných pomocí LQ regulátoru v souřadné soustavě $\alpha - \beta$.

4.2.2 Bikriteriální duální řízení

V části 3.6 byly popsány čtyři verze bikriteriální metody: základní verze, časově posunutá verze, více současně běžících EKF a přidání konstanty k řízení v ose d. Tyto postupy se však týkají pouze budící části a je třeba je přidat k opatrnému řízení. Jak již bylo zmíněno, nalezení opatrného řízení je v případě PMSM problematické a proto je místo něj užito standardní vektorového řízení. Je uvažováno vektorové řízení založené na PI regulátorech i na LQ návrhu. Jednotlivé verze lišící se verzí bikriteriální metody a volbou

řízení byly vzájemně porovnány především na základě dosažených středních kvadratických chyb. Hodnota parametru ε, případně ε_d a ε_q, byla v provedených experimentech volena 5 V.

Bikriteriální metoda s vektorovým PI řízením

Nejdříve byla věnována pozornost různým verzím bikriteriální metody využívající jako řídící „opatrnou“ část vektorové PI řízení. Právě využití tohoto řízení však přináší řadu komplikací. Především v tom smyslu, že jsou opět do jisté míry přítomny již zmiňované nedostatky tohoto řídícího algoritmu. Konkrétně se jedná o problémy v nízkých otáčkách, kdy regulátor neřídí a dále pak problémy při průchodu nulovými otáčkami. Také se zde objevuje nežádoucí jev, kdy se stroj začne otáčet na opačnou stranu.

Z jednotlivých verzí bikriteriální metody se v tomto případě ukazuje být jedinou použitelnou přidávání konstanty k řídícímu zásahu v ose d. Zbývající verze poskytují velmi špatný výsledek co se kvality řízení týče a vyskytuje se u nich problém s rozběhem stroje na opačnou stranu.

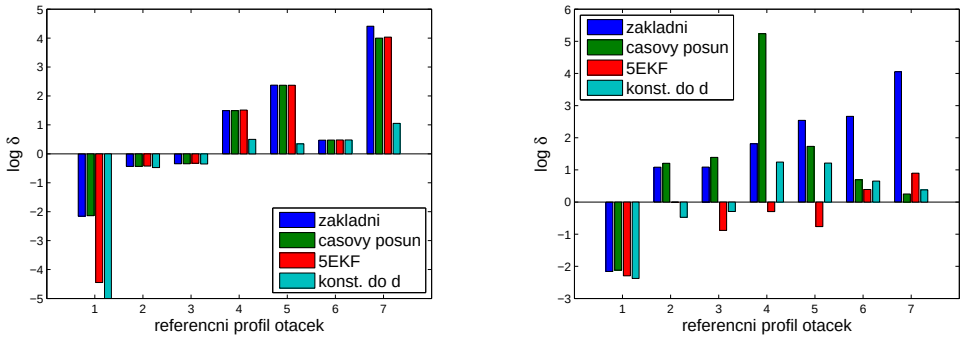
Hodnoty střední kvadratické chyby pro jednotlivé verze bikriteriální metody na různých profilech referenčních otáček jsou zachyceny na obrázku 4.7 a). Pro profily s nízkými požadovanými otáčkami je dosahováno zdánlivě malé chyby, ta je však způsobena vlastností vektorového PI řízení, které v nízkých otáčkách neřídí. Pro referenční profil středních otáček jsou vyšší chyby opět v důsledku špatného chování při průchodu nulou. Dále pak pro lichoběžníkové profily často dochází k problému s rozjezdem na opačnou stranu, který způsobí značný nárůst chyby. Z obrázku je dále patrné, že verze bikriteriální metody přidávající konstantu k řízení v ose d jako jediná poskytuje stabilně relativně dobré výsledky.

V případě využití PI regulátorů může navíc docházet i k dalšímu problému, zejména v případě uvažování konstantního buzení. Takový budící zásah může totiž regulátor vykompenzovat jako trvalou regulační odchylku, takže se ve větší míře projeví pouze na počátku běhu systému.

Bikriteriální metoda s vektorovým LQ řízením

Dále byly testovány jednotlivé verze bikriteriální metody doplněné lineárně kvadratickým regulátorem. Jak bylo popsáno v předchozím odstavci 4.2.1, použití LQ regulátoru odstraňuje některé nedostatky vektorového řízení založeného na PI regulátorech, především v nízkých otáčkách. Bylo by tedy možno očekávat jisté zlepšení na profilech nulové otáčky a dále při průchodech nulou na profilech střední otáčky. Výsledky simulací však na příliš velké zlepšení neukazují.

Hodnoty střední kvadratické chyby jsou zachyceny na obrázku 4.7 b). Při použití základní i časově posunuté verze bikriteriální metody je sice udržován dobrý odhad polohy ϑ, ale je způsobováno značné rušení při dosahování požadavku na otáčky a výsledné řízení je nedostačující. Lepší výsledky byly získány přidáváním konstanty k řízení v ose d, avšak stále se nejedná o použitelný algoritmus. Nejlepších výsledků pak bylo dosaženo s verzí bikriteriální metody využívající pěti rozšířených Kalmanových filtrů. Ta byla



a) PI regulátory b) LQ regulátor

Obrázek 4.7: Hodnoty střední kvadratické chyby pro jednotlivé verze (viz legenda) bikriteriální metody, při současném užití vektorového řízení s a) PI nebo b) LQ regulátory. V grafech označuje δ střední kvadratickou chybu. Referenční profily otáček jsou následující: 1 – nulový; 2 – nízké otáčky trojúhelníky; 3 – nízké otáčky lichoběžníky; 4 – střední otáčky trojúhelníky; 5 – střední otáčky lichoběžníky; 6 – vysoké otáčky trojúhelníky; 7 – vysoké otáčky lichoběžníky.

vyhodnocena jako nejlepší ze všech testovaných verzí, a to i ve srovnání s předchozími verzemi, založenými na vektorovém řízení s PI regulátory.

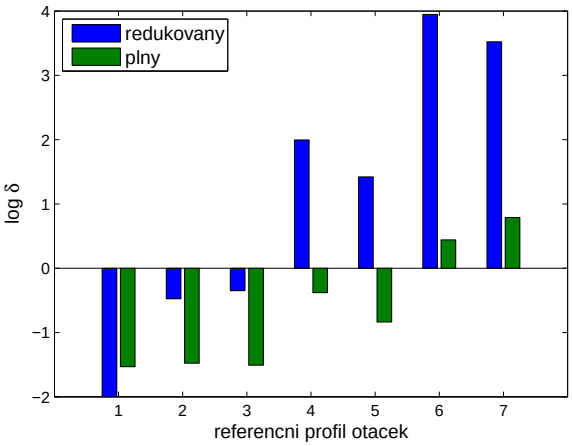
Jako zástupce bikriteriální metody bude dále uvažován LQ regulátor s buzením vybíraným na základě pěti rozšířených Kalmanových filtrů a bude označován jako BK.

4.2.3 LQ regulátor s hyperstavem

Další možností pro nalezení vhodného řízení PMSM jsou postupy založené na využití myšlenky hyperstavu. V části 3.5 byly popsány dva LQG algoritmy, jeden využívající redukovaný model stroje a druhý založený na modelu plném. Kvalita jimi poskytovaného řízení byla opět experimentálně ověřena pomocí simulátoru PMSM. Srovnání bylo provedeno především na základě dosažených středních kvadratických chyb na jeden časový krok a tyto hodnoty jsou zaznamenány v grafu na obrázku 4.8.

LQG s hyperstavem pro redukovaný model vychází ze vzájemného porovnání znatelně hůře. V nízkých otáčkách je jeho problémem neaktivita, podobně jako u vektorového řízení založeného na PI regulátorech. Ve vyšších otáčkách je pak špatná kvalita poskytovaného řízení způsobována nevhodnými řídícími zásahy, kdy dochází k rozkmitání. Pravděpodobnou příčinou špatné funkčnosti této verze hyperstavu je problematický návrh LQ regulátoru na redukovaném modelu, viz odstavec 3.4.3.

V případě hyperstavu pro plný model jsou výsledky výrazně lepší, výpočetní náročnost je však znatelně vyšší. Tato verze LQ regulátoru s hyperstavem byla vybrána jako zástupce označený LQ-HS a porovnání s ostatními algoritmy následuje v textu.



Obrázek 4.8: Hodnoty střední kvadratické chyby algoritmu využívajícího hyperstav pro plný a redukovaný model PMSM. V grafech označuje δ střední kvadratickou chybu. Referenční profily otáček jsou následující: 1 – nulový; 2 – nízké otáčky trojúhelníky; 3 – nízké otáčky lichoběžníky; 4 – střední otáčky trojúhelníky; 5 – střední otáčky lichoběžníky; 6 – vysoké otáčky trojúhelníky; 7 – vysoké otáčky lichoběžníky.

4.3 Aposteriorní Cramer-Raovy meze

Jak již bylo podrobněji zmiňováno v předchozích částech textu, je hlavní komplikací bezsenzorového řízení PMSM problém pozorovatelnosti neměřených veličin v nízkých otáčkách. Standardně je odhad těchto veličin získáván ze zpětné elektromotorické síly, jejíž velikost je však přímo úměrná otáčkám stroje. V nulových otáčkách pak zcela vymizí a poloha ϑ se stává nepozorovatelným stavem. Situace druhé neměřené veličiny – otáček ω je v tomto smyslu daleko lepší, protože její velikost odpovídá velikosti zpětné elektromotorické síly. V nulových otáčkách tedy tato veličina není nepozorovatelná, ale nulová.

Tato práce je zaměřena na duální metody řízení a s tím je spojena i volba vhodného budícího signálu, který má za cíl pozorovatelnost stavu zlepšit. Nástrojem jak vyhodnocovat pozorovatelnost stavových veličin pro nelineární systémy jsou právě aposteriorní Cramer-Raovy meze. V této části tedy budou předloženy výsledky analýzy modelu PMSM na základě tohoto nástroje. Jednak budou prostudovány přídavné signály užívané při aplikaci metod vysokofrekvenčních injektáží ve smyslu, jak samy o sobě dokáží zlepšit pozorovatelnost. Následovat pak bude analýza v této práci uvažovaných duálních algoritmů – bikriteriální metody a využití hyperstavu.

4.3.1 Vzorový běh systému

Výpočet hodnot aposteriorních Cramer-Raových mezí probíhá na vzorovém běhu systému. Ze vzorového běhu jsou získány průběhy jednotlivých stavových veličin v čase, které pak slouží jako zdroj pro výpočet vlastních mezí. Jako vzorový běh lze buď přímo zvolit nějaké hodnoty a nebo je získat aplikací vhodného regulátoru na model systému. Pro tento případ bylo užíváno vektorové PI řízení (implementované jako referenční) získávající odhad ze senzorů a řídící na určenou referenční hodnotu. Řídící zásahy byly následně doplněny vysokofrekvenčním signálem a to v souřadné soustavě $\alpha-\beta$ nebo $d-q$ a byl testován sinový i obdélníkový signál. Dále byla testována bikriteriální metoda, konkrétně její základní verze, verze užívající pěti EKF a přidání konstantní hodnoty do osy d. Posledním zkoumaným algoritmem pak bylo využití hyperstavu, které však nevyužívá PI regulátory, ale je založeno na vektorovém řízení s LQ regulátorem.

Použité vzorové běhy shrnuje následující seznam:

- vektorové PI řízení
  - vysokofrekvenční injektáž do $d-q$
    - sinový signál
    - obdélníkový signál
  - vysokofrekvenční injektáž do $\alpha-\beta$
    - sinový signál
    - obdélníkový signál
  - bikriteriální metoda
    - základní verze
    - výběr buzení na základě výpočtu pěti EKF
    - konstantní signál v ose d
- využití hyperstavu
  - plný model
  - redukovaný model

Pro výpočet samotných Cramer-Raových mezí bylo užito rovnic (2.3) a (2.6) a byl uvažován model PMSM v souřadné soustavě $\alpha-\beta$ pro stejné (L_s) i různé (L_d a L_q) indukčnosti. Výchozí hodnota meze byla pro všechny uvažované veličiny volena $1,0e-7$ aby byla dostatečně nízká, ale současně nenulová. Dále byly použity kovarianční matice Q a R s hodnotami kovariančních matic užitých pro šum (4.1).

4.3.2 Porovnání algoritmů

Vzhledem k tomu, že proudy $i_{\alpha\beta}$ jsou měřené veličiny, tak u nich lze očekávat nízkou mez a chyba v jejich odhadu je způsobena prakticky pouze chybou měření. Ve všech

prováděných výpočtech PCRB byla hodnota této meze pro proudy $i_{\alpha\beta}$ nižší než $5,0e-4$ a dále se tedy mezemi pro proudy zabývat nebudeme. Podobně není příliš zajímavá ani Cramer-Raova mez pro otáčky ω. Ty sice již nejsou měřeny, ale mez je relativně nízká a obvykle se drží na hodnotě přibližně $1,2e-2$. Cramer-Raově mezi otáček ω tedy opět nebude příliš věnována pozornost s výjimkou případů, kdy by došlo k její výraznější změně.

Vliv rychlosti

Nejzajímavější z hlediska aplikace konceptu PCRB jsou tedy výsledky týkající se polohy ϑ, která je při nulových otáčkách nepozorovatelným stavem. Pokud zůstává hodnota otáček nulová a není přítomno žádné další buzení, Cramer-Raova mez ϑ stále roste, teoreticky až ke své krajní hodnotě odpovídající varianci uniformního rozdělení na intervalu $(-\pi, \pi\rangle$. Tento jev stálého růstu je možno pozorovat na grafu obrázek 4.9. Protože s růstem otáček roste zpětná elektromotorická síla, zvyšuje se množství informace o veličině ϑ a následně se i snižuje chyba jejího odhadu. Zpřesnění odhadu a tedy pokles PCRB v důsledku vyšších otáček lze sledovat pro různé profily na grafu obrázek 4.9 a).

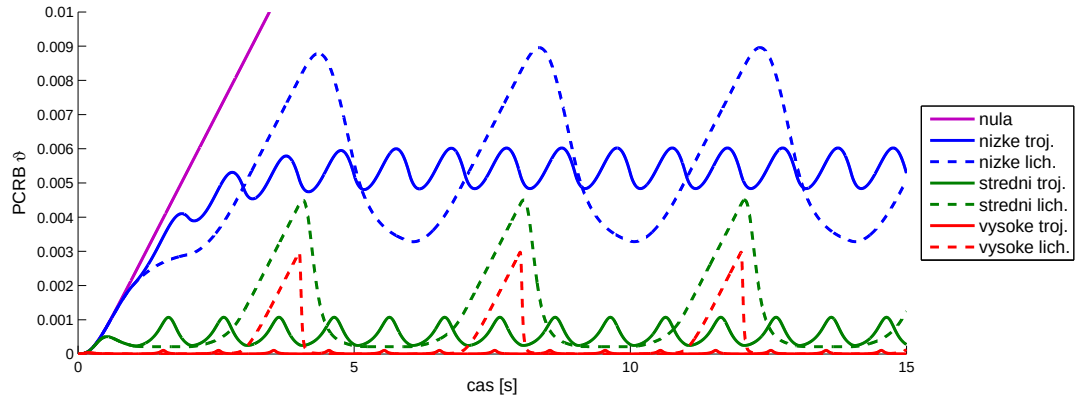
Význam pro snížení meze ϑ však nemají pouze otáčky, u kterých lze tento vliv očekávávat, ale také vhodný budící signál. Vliv přidaného signálu byl zkoumán zejména na profilu nulových otáček, kdy je nejvíce patrný. Pro výpočet PCRB byl uvažován vysokofrekvenční signál o amplitudě 5 V a frekvenci 1000 Hz. Na rozdíl od běžných injektážních metod však tento signál nebyl nijak vyhodnocován a byl pouze zkoumán jeho vliv na pozorovatelnost stavu, konkrétně PCRB ϑ.

Vliv přídavného signálu

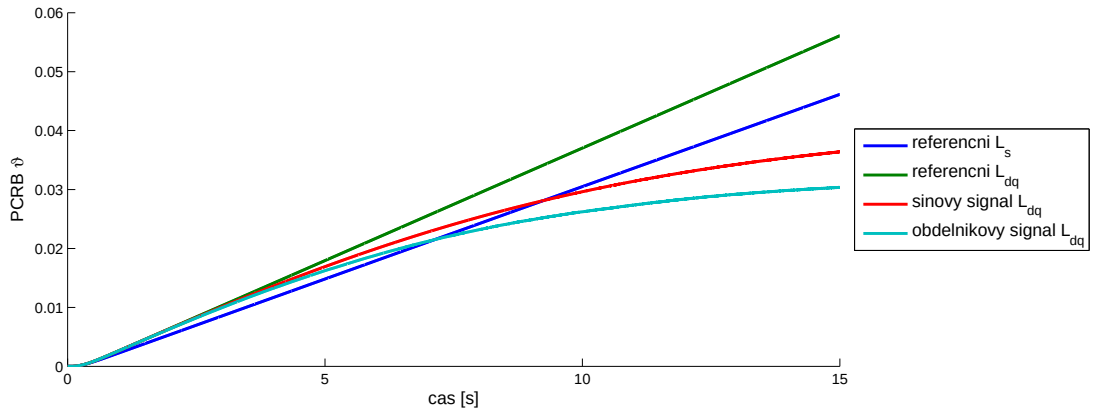
Signál byl přidáván jak v souřadné soustavě $\alpha - \beta$, tak i v $d - q$. Je však nutno poznamenat, že nebyl prokázán prakticky žádný vliv volby souřadné soustavy. Lze tedy očekávat, že volba souřadného systému má vliv pouze na metody, kde je injektovaný signál dále vyhodnocován a neslouží pouze jako buzení ke zlepšení pozorovatelnosti. Dále tedy nebyla volba souřadné soustavy pro přidávání signálu rozlišována.

Užívaný vysokofrekvenční signál byl dvou typů, jednak harmonický sinový signál a dále obdélníkový signál o stejné amplitudě i frekvenci. Z těchto dvou signálů pak poskytuje lepší výsledky signál obdélníkový. Důležitějším zjištěním ale je, že vysokofrekvenční signál snižuje hodnotu PCRB pouze při uvažování modelu s různými indukčnostmi $L_d \neq L_q$. Při uvažování stejných indukčností L_s je jeho vliv zanedbatelný.

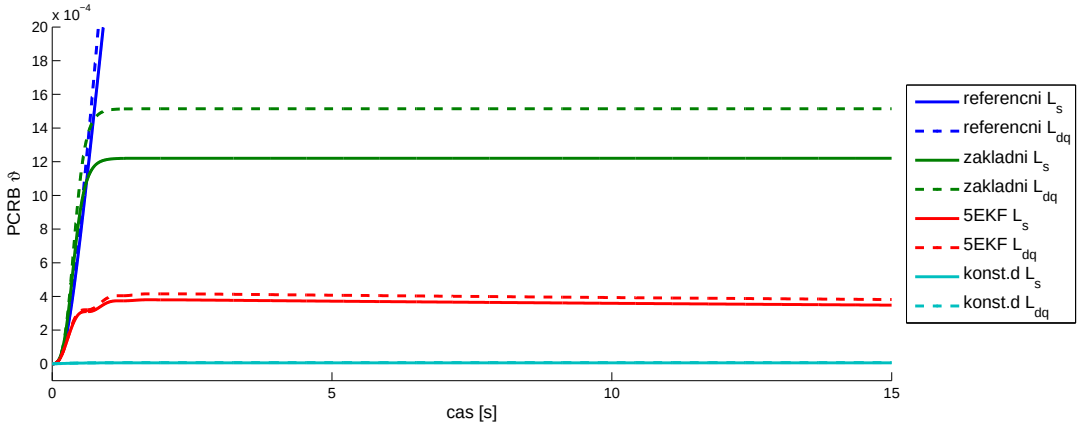
Výsledky analýzy použití vysokofrekvenčních přídavných signálů jsou zachyceny na grafu obrázek 4.9 b). Je použit nulový profil otáček a jako srovnávací je označeno vektorové PI řízení. Je možno pozorovat, že pro různé indukčnosti je dosaženo vyšší hodnoty PCRB ϑ, přidáním vysokofrekvenčního signálu však dojde ke značnému omezení růstu hodnot meze. Oproti tomu v případě uvažování stejných indukčností je hodnota meze nižší, ale přidání vysokofrekvenčního signálu nemá žádný vliv a tento případ tedy není ani v grafu uveden.



a) snížení hodnoty PCRB ϑ v důsledku zvýšení otáček



b) omezení růstu hodnoty PCRB ϑ vlivem přidaného budícího signálu



c) snížení hodnoty PCRB ϑ aplikací bikriteriální metody

Obrázek 4.9: Hodnoty aposteriorní Cramer-Raovy meze (PCRB) polohy ϑ: a) jejich snižování v důsledku zvýšení otáček při různých referenčních profilech; b) omezování jejich hodnoty vlivem přidaného budícího signálu; c) snížení jejich hodnoty užitím bikriteriální metody.

Bikriteriální metoda

Velmi významný vliv na hodnotu aposteriorní Cramer-Raovy meze má užití bikriteriální metody. Pro zkoumání pomocí PCRB byly uvažovány tři verze této metody, jmenovitě základní verze, užití 5 EKF pro výběr nejlepšího buzení a přidání konstantního signálu do osy d. Všichni tři zmiňovaní zástupci dosáhli řádově lepších výsledků, oproti těm z minulého odstavce založených na přidávání vysokofrekvenčního signálu. Vliv bikriteriální metody na hodnotu PCRB je srovnatelný s během stroje ve vysokých otáčkách, ale s tím rozdílem, že pro aplikaci bikriteriální metody byl uvažován stroj v klidu.

Ze tří uvažovaných verzí pak byla relativně nejhorší verze základní. Lepších výsledků bylo dosaženo za použití 5 rozšířených Kalmanových filtrů pro výběr nejlepšího buzení. Nejlepší výsledky pak překvapivě poskytuje velmi jednoduchá verze spočívající v přidání konstantního signálu do osy d.

Dalším zajímavým zjištěním je, že pro každou z uvažovaných verzí je vždy (alespoň nepatrně) dosaženo horších výsledků při užití modelu s různými indukčnostmi L_d a L_q. Grafické znázornění výsledků bikriteriální metody a srovnání s referenčním vektorovým PI řízením je prezentováno na obrázku 4.9 c).

Ohledně bikriteriální metody je ještě třeba zmínit, že se jedná o jediný případ ze zde uvažovaných možností, který způsoboval výraznější změnu Cramer-Raovy meze otáček ω. Konkrétně se jedná o menší nárůst meze při přidávání konstantní hodnoty do osy d, na přibližně $1,4e-2$. Výraznější nárůst byl pak zaznamenán pro základní verzi bikriteriální metody, kdy PCRB ω dosahovala až hodnoty $4,5e-2$.

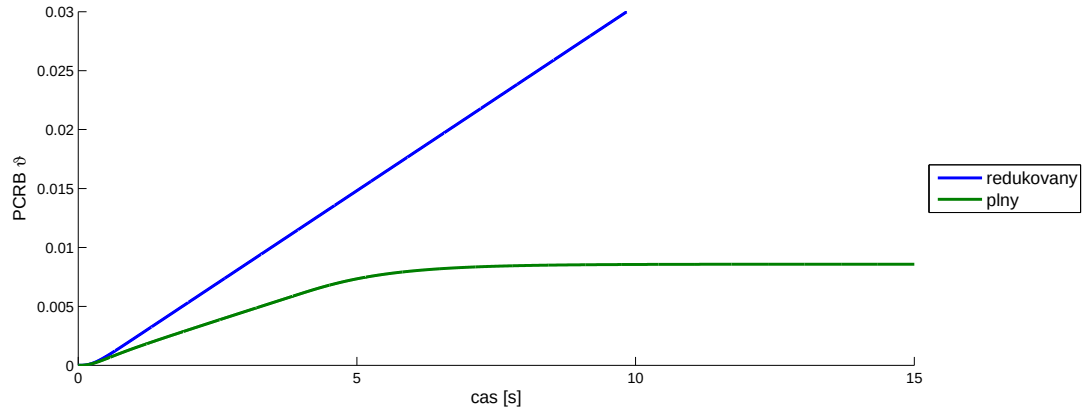
LQ regulátor s hyperstavem

Dále byly analyzovány Cramer-Raovy meze při využití hyperstavu. Výsledné hodnoty pro redukovaný i plný stav při nulovém referenčním profil jsou zobrazeny na obrázku 4.10 a). V případě redukovaného stavu nedochází k omezování meze a ta stále roste. Tento jev je s největší pravděpodobností způsoben komplikovanějším dvoufázovým návrhem řízení pro redukovaný model, který pak trpí podobným nedostatkem jako vektorové PI řízení. Lepších výsledků je však dosaženo při užití hyperstavu s plným modelem, který relativně dobře zvládá snižovat hodnotu PCRB ϑ.

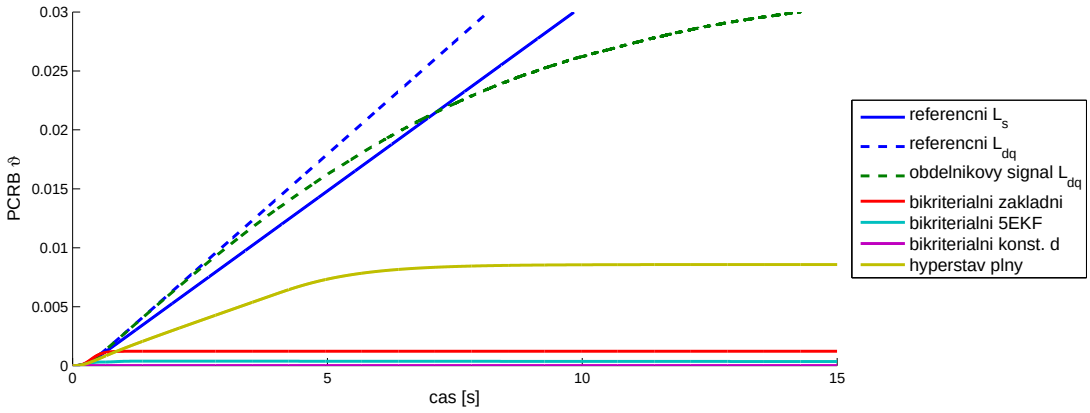
Vzájemné porovnání PCRB

Na obrázku 4.10 b) zachyceno porovnání vybraných zástupců z předchozích odstavců. Při užití vektorového PI řízení bez dalšího buzení Cramer-Raova mez polohy stále roste. V případě různých indukčností v osách $d-q$ roste rychleji, ale přidáním vysokofrekvenčního signálu ji lze snížit. V případě stejných indukčností nemá vysokofrekvenční signál na hodnotu meze vliv.

Znatelně lepších výsledků je však možno dosáhnout při užití bikriteriální metody nebo hyperstavu. Bikriteriální metoda zde dosahuje pro všechny uvažované verze relativně nejlepších výsledků co se týče vlivu na PCRB ϑ. Z jejích jednotlivých verzí se pak jako nejlepší ukazuje jednoduché přidání konstantního signálu k řídícímu zásahu v ose d.



a) hodnoty PCRB ϑ při užití hyperstavu



b) porovnání vybraných zástupců

Obrázek 4.10: Hodnoty aposteriorní Cramer-Raovy meze (PCRB) polohy ϑ v nulových otáčkách: a) při užití hyperstavu; b) porovnání vybraných zástupců všech metod.

Oproti tomu ale v případě užití některých verzí bikriteriální metody dochází k menšímu růstu Cramer-Raovy meze otáček ω.

Použitím hyperstavu lze také dosáhnout výrazného snížení Cramer-Raovy meze. Pokles sice není tak výrazný jako u bikriteriální metody, ale to je pravděpodobně způsobeno strukturou samotných algoritmů. Zatímco bikriteriální metoda přidává budící signál víceméně stále, LQ regulátor s hyperstavem je přístup více odpovídající koncepci duálního řízení a snaží se hledat kompromis mezi optimálním řízením a buzením. Nachází-li se v nulových otáčkách a je-li požadovaná hodnota otáček také nulová, jako v uvažovaném případě, není pravděpodobně třeba příliš velkého buzení.

4.4 Simulační porovnání algoritmů

V předchozích částech byly popsány jednotlivé zkoumané algoritmy pro řešení úlohy řízení synchronního stroje s permanentními magnety. Pozornost byla věnována především popisu základních vlastností jednotlivých přístupů a dále vzájemnému porovnání jednotlivých verzí téže metody. Následující část textu bude věnována vzájemnému porovnání jednotlivých metod. Porovnání z hlediska vlivu konkrétních algoritmů na pozorovatelnost systému již bylo provedeno v části 4.3 týkající se aposteriorních Cramer-Raových mezí, zde bude věnována pozornost spíše celkové kvalitě poskytnutého řízení.

Porovnávány budou pouze vybrané algoritmy. Konkrétně se jedná o neduální referenční vektorové PI řízení (PI) a vektorové řízení s LQ regulátorem (LQ-CE). Dále bude zahrnut LQ regulátor doplněný vysokofrekvenční injektáží (INJ) jako zástupce klasických postupů řešení bezsenzorového řízení PMSM. Z duálních algoritmů pak bude uvažován algoritmus založený na hyperstavu (LQ-HS) a verze bikriteriální metody založená na vektorovém řízení s LQ regulátorem, která vybírá budící zásah na základě výpočtu 5 EKF (BK).

4.4.1 Rozjezd stroje

Nejprve bude věnována pozornost chování jednotlivých algoritmů při rozjezdu stroje. Hlavní komplikací v tomto případě je obecně neznalost počátečního úhlu natočení rotoru ϑ. Právě špatný počáteční odhad polohy může způsobit značné chyby v plnění požadavků řízení a je tedy snahou tento negativní vliv omezit. Zde lze očekávat pozitivní vliv duálních metod, které se namísto řízení se špatným odhadem snaží i tento odhad zlepšit.

Nejsou-li o počátečním stavu stroje dostupné žádné další informace, lze rotor očekávat libovolně natočený, což odpovídá předpokladu, že počáteční úhel ϑ_0 je náhodnou veličinou s rovnoměrným rozdělením na intervalu $(-\pi, \pi\rangle$. Zde však dochází k problému s již zmiňovanou symetrií rovnic stroje na substituci $(\omega, \vartheta) \longleftrightarrow (-\omega, \vartheta + \pi)$.

Realizaci jedné nebo druhé varianty není možno okamžitě poznat z modelu stroje a jejich rozpoznání je třeba řešit jinak. Jednou možností je užití metod popsaných v odstavci 1.3.6. Dalším způsobem, jak toto rozpoznání provést, je sledovat běh stroje po delší časový úsek. Když se totiž skutečný stroj otáčí na druhou stranu než předpokládá jeho model, dodávané řídící zásahy na základě modelu přestanou odpovídat skutečnému

stroji a z této neshody mezi strojem a modelem již lze poznat, že došlo ke špatnému odhadu. Problémem zmiňovaného přístupu je právě delší časový okamžik nezbytný k detekci této chyby.

Z důvodů zmiňovaných komplikací bude tedy dále v textu předpokládán počáteční úhel natočení pouze v intervalu $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$ a případné rozjezdy na opačnou stranu, tedy realizaci verze $(-\omega, \vartheta + \pi)$ namísto (ω, ϑ), budou detekovány a ze vzájemného porovnání jednotlivých algoritmů vyřazeny. Vhodné zvládnutí detekce, ke které realizaci symetrických verzí došlo tedy zůstává nevyřešena a je vhodná k dalšímu výzkumu.

Konkrétní porovnání jednotlivých algoritmů pak probíhalo na *trojúhelníkovém* profilu *střední otáčky* v časovém horizontu 1 s. Důvodem pro volbu tohoto profilu bylo, že profily s nižšími otáčkami způsobují značné komplikace některým algoritmům, zejména založeným na PI regulátorech a ve vyšších otáčkách je již odhad úhlu příliš usnadněn vyšší rychlostí a tedy větší zpětnou elektromotorickou silou. Počáteční poloha ϑ_0 byla volena náhodně z intervalu $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$ a simulace byly prováděny opakovaně. Použito bylo vždy 100 opakování, do grafů zobrazujících chyby odhadů (obrázek 4.11) však bylo pro přehlednost uvažováno méně vzorků.

Jednotlivé algoritmy byly porovnávány na základě střední kvadratické chyby (střední pro jeden časový krok i pro jednotlivé realizace počáteční polohy ϑ_0), tedy z hlediska, jak dobře zvládne stroj regulovaný daným algoritmem sledovat referenční signál. Toto porovnání je pro jednotlivé algoritmy zobrazeno na grafu 4.11 a). A zřejmě se na něm ukazuje přínos duálních metod při zvládnutí neznámé počáteční polohy.

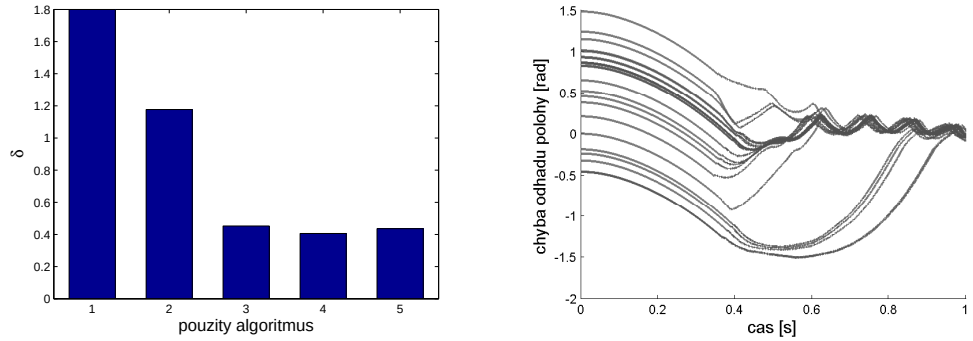
Dalším zkoumaným hlediskem je schopnost jednotlivých algoritmů nalézt správnou polohu stroje ϑ. Vývoj chyby odhadu polohy $\vartheta - \hat{\vartheta}$ v čase pro jednotlivé algoritmy a různé počáteční hodnoty úhlu natočení ϑ_0 ze zachycen na obrázku 4.11 b)-f). Relativně dobrá schopnost nalézt správný odhad polohy i u neduálních metod je dána především tím, že jako pozorovatele užívají rozšířený Kalmanův filtr a že s růstem otáček se zvyšuje pozorovatelnost systému. Celkově je ale možné pozorovat lepší výsledku u duálních metod, konkrétně u BK a LQ-HS.

Ještě je vhodné poukázat na špatné chování referenčního regulátoru PI. Problém se týká nízkých požadovaných otáček, kdy regulátor v jistém smyslu „nic nedělá“. V důsledku toho pak dosahuje relativně vyšší střední kvadratické chyby, tento jev lze také pozorovat na obrázku 4.11 b) na počátku běhu systému.

4.4.2 Odhad v nule

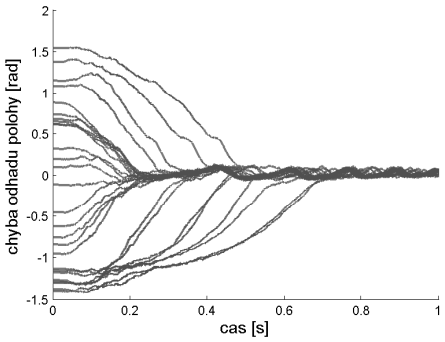
Dále byly prováděny podobné simulace jako v předchozím odstavci, týkajícím se rozjezdu stroje, nyní však s jiným profilem požadovaných otáček. Bylo testováno chování jednotlivých algoritmů v nulových otáčkách při špatném počátečním odhadu úhlu ϑ_0. Počáteční poloha ϑ_0 byla opět volena náhodně z intervalu $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$ ze stejných důvodů jako v předchozím odstavci. Simulace byly prováděny opakovaně, vždy 100 opakování, do grafů zobrazujících chyby odhadů bylo pro přehlednost uvažováno vzorků méně.

Provedené simulace byly jednak zaměřeny na velikost chyby řízení v nulových otáčkách, ale především na zkoumání schopnosti jednotlivých algoritmů omezit počáteční neznalost polohy ϑ při současném požadavku na udržení stroje v klidu. Oproti předcho-

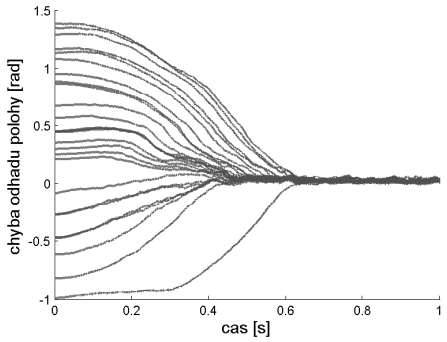


a) střední kvadratická chyba

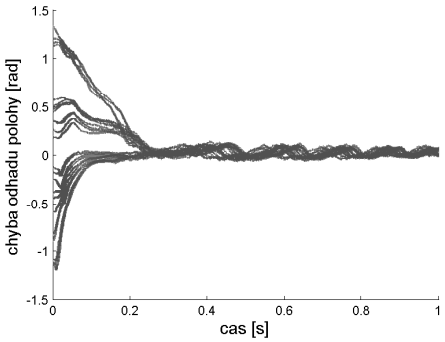
b) PI



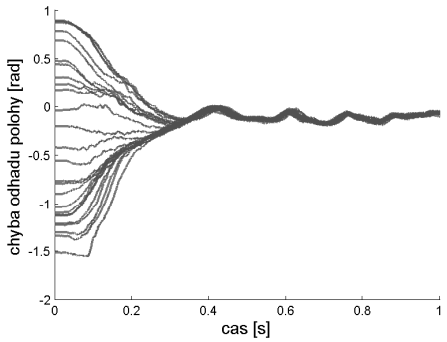
c) LQ-CE



d) INJ



e) BK



f) LQ-HS

Obrázek 4.11: Vliv počáteční polohy na rozjezd stroje při užití různých algoritmů. a) přehled dosažených středních kvadratických chyb (δ) pro jednotlivé algoritmy 1 až 5; dále je zobrazena chyba odhadu polohy $\vartheta - \hat{\vartheta}$ pro: b) PI (algoritmus 1), c) LQ-CE (algoritmus 2), d) INJ (algoritmus 3), e) BK (algoritmus 4), f) LQ-HS (algoritmus 5).

zímu odstavci zde nedochází ke zvyšování hodnoty referenčních otáček a tak vzhledem k referenčním otáčkám je poloha stále nepozorovatelným stavem. Ke zlepšení odhadu polohy je tedy třeba aktivního budícího zásahu, který ovšem zřejmě naruší požadovaný klidový stav stroje. Právě při této úloze by se měly s výhodou uplatnit duální algoritmy.

Na grafech b)-f) obrázku 4.12 jsou znázorněny průběhy chyb odhadu polohy $\vartheta - \hat{\vartheta}$ v čase pro jednotlivý algoritmy při různé počáteční hodnotě úhlu natočení ϑ_0. V případě samostatného vektorového řízení nedochází nijak k omezování chyby odhadu. Konkrétně pro PI jsou všechny řídící zásahy nulové a chyba odhadu zůstává v čase konstantní. V případě LQ-CE je situace nepatrně lepší a chyby odhadu nezůstávají zcela konstantní a dochází k drobnému zvlnění. Jedná se však spíše o náhodné změny v důsledku řídících zásahů snažících se udržet nulové otáčky.

Zcela odlišné výsledky však poskytují zbývající tři algoritmy, které zvládají počáteční chybu odhadu polohy výrazně omezit. Je však důležité věnovat pozornost i dosažené chybě při řízení na nulové požadované otáčky. Tato chyba je zde opět reprezentována jako střední kvadratická chyba skutečných a požadovaných otáček a její hodnoty jsou pro jednotlivé algoritmy zaneseny v grafu na obrázku 4.12 a). Zřejmě lze očekávat, že v případě algoritmů, které nějakým způsobem omezují chybu odhadu polohy dojde k nárůstu chyby řízení. V případě PI, které při požadavku na nulové otáčky stručně řečeno „nic nedělá“ je také chyba řízení nulová. Naopak pro BK, která zvládá omezování počáteční chyby odhadu polohy relativně nejlépe je střední kvadratická chyba skutečných a požadovaných otáček vysoká. Vyšší chyby pak dosahuje i LQ-HS. Nejlepších výsledků a současně jakéhosi kompromisu pak dosahuje algoritmus INJ, který zvládají efektivně omezit chybu odhadu a současně udržet chybu řízení dostatečně nízkou.

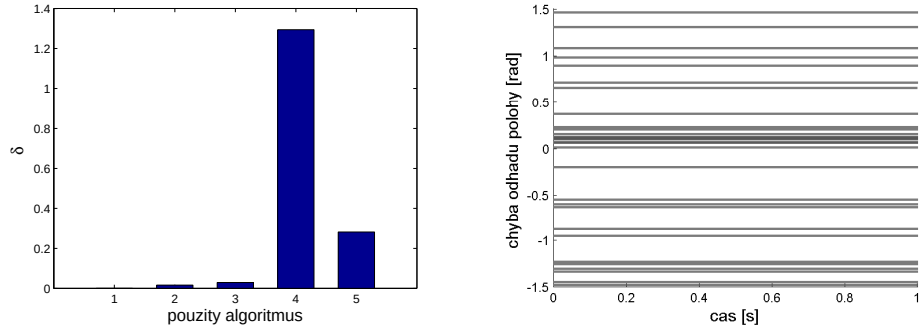
4.4.3 Nízké otáčky

Tento odstavec bude zaměřen na chování jednotlivých algoritmů v nízkých otáčkách. Pro srovnání bylo konkrétně užito profilů *nízké otáčky trojúhelníky* a *lichoběžníky*. Jednotlivé algoritmy byly porovnány na základě středních kvadratických chyb, jejich hodnoty jsou pak zaneseny v grafu na obrázku 4.14 a). Dále je chování jednotlivých algoritmů možno posoudit i z průběhů otáček ω v čase, které jsou pro jednotlivé algoritmy zachyceny na grafech 4.13 a) pro trojúhelníkový a b) pro lichoběžníkový profil požadovaných otáček.

Především lze opět pozorovat již zmiňovanou neaktivitu PI, kdy na profilu nízkých otáček s amplitudou 1 rad/s vůbec nedojde k roztočení stroje a v důsledku toho pak dohází k relativně větší střední kvadratické chybě.

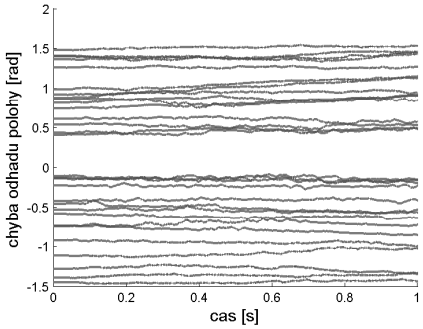
Dále je velmi zajímavé chování BK. Protože se jedná o jednoduchý suboptimální duální algoritmus není zde dosažena vhodná rovnováha mezi opatrností a buzením. To se projevuje především velmi výraznými budícími zásahy v nulových otáčkách, které následně způsobí nárůst chyby řízení. Z jistého úhlu pohledu však nelze označit toto chování přímo za špatné. Regulátor totiž přidává výrazné budící zásahy pouze při dosažení nulových otáček, tedy když dojde k nepozorovatelnosti systému. Tyto budící zásahy jsou však relativně velké vzhledem k amplitudě otáček, což by mohlo být překážkou pro praktickou aplikaci algoritmu.

Ostatní uvažované algoritmy vykazují vizuálně podobný průběh otáček a tedy jsou

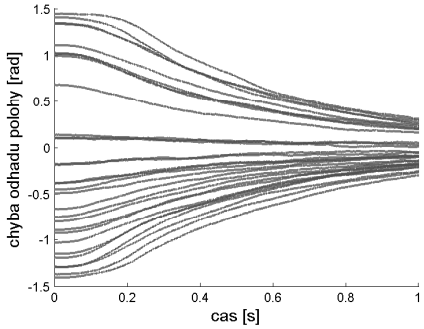


a) střední kvadratická chyba

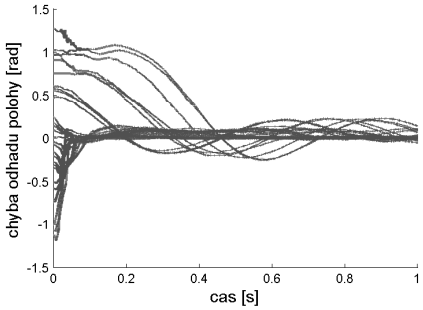
b) PI



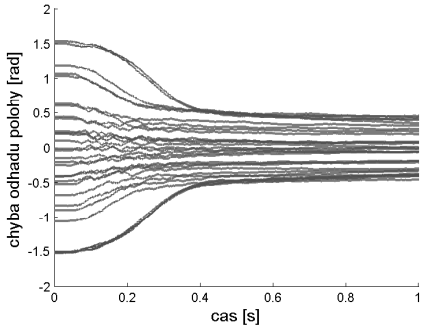
c) LQ-CE



d) INJ

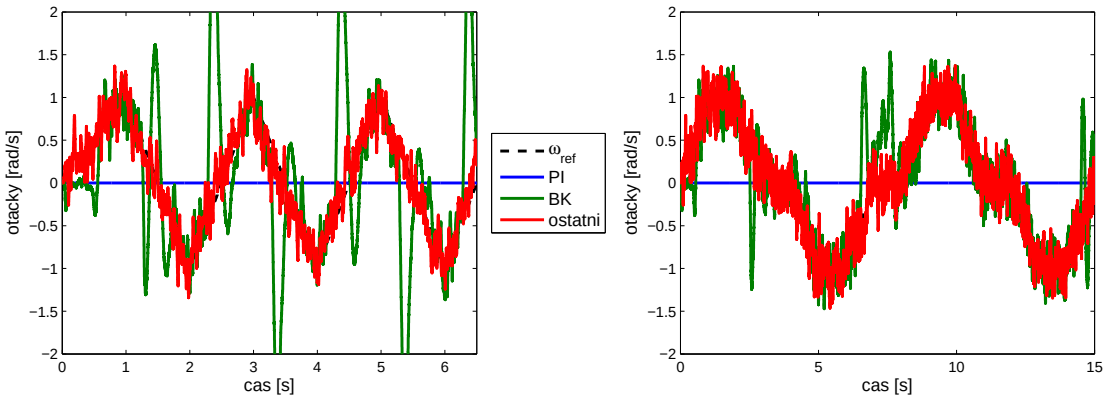


e) BK



f) LQ-HS

Obrázek 4.12: Vliv počáteční polohy na setrvání stroje v nulových otáčkách při užití různých algoritmů. a) přehled dosažených středních kvadratických chyb (δ) pro jednotlivé algoritmy 1 až 5; dále je zobrazena chyba odhadu polohy $\vartheta - \hat{\vartheta}$ pro: b) PI (algoritmus 1), c) LQ-CE (algoritmus 2), d) INJ (algoritmus 3), e) BK (algoritmus 4), f) LQ-HS (algoritmus 5).



a) nízké otáčky – trojúhelníky b) nízké otáčky – lichoběžníky

Obrázek 4.13: Porovnání průběhu hodnoty otáček ω při řízení jednotlivými algoritmy na požadovanou hodnotu ω_{ref} danou profilem *nízké otáčky* (a) trojúhelníky a (b) lichoběžníky. Pod označením *ostatní* jsou rozumněny následující algoritmy: LQ-CE, INJ a LQ-HS.

v grafech zobrazeny pouze jako jeden společný reprezentant *ostatní*. Všechny tyto algoritmy také dosáhly relativně nízké střední kvadratické chyby pro trojúhelníkový i lichoběžníkový profil. Jako nejlepší z nich a i celkově se ukazuje INJ, rozdíl oproti LQ-HS je však malý. Nízké chyby pak dosahuje i LQ-CE.

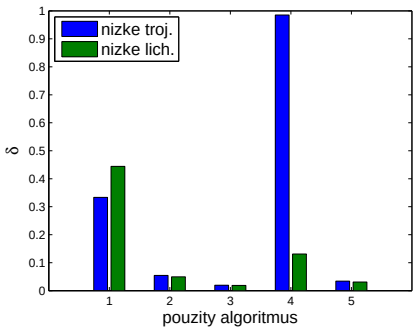
4.4.4 Průchody nulou

Dále byla věnována pozornost problematice průchodů nulou. Jedná se o změnu směru otáčení stroje, která může být ztížena setrváním po určitý časový okamžik v klidu, tedy při nulových otáčkách. Běžný průchod nulou je realizován pomocí trojúhelníkového referenčního profilu, průchod se setrváním v nulových otáčkách pak profilem lichoběžníkovým. Pro srovnání jednotlivých algoritmů bylo užito simulací s referenčními profily otáček *střední otáčky*. Výsledky těchto simulací v podobě průběhů hodnoty otáček ω v čase pro různé algoritmy jsou zachyceny na grafech 4.15 a) a b).

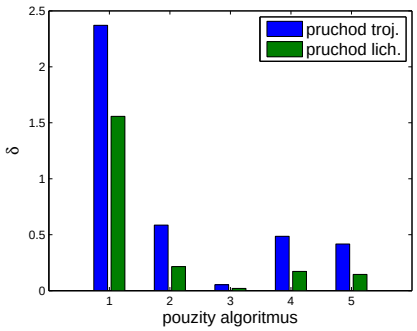
Jednotlivé algoritmy pak byly porovnávány na základě dosažených středních kvadratických chyb, jejichž hodnoty jsou uvedeny v grafu 4.14 b). Největší chyby ve sledování referenčního signálu se dopustilo PI. Problémem je opět „neaktivita“ tohoto algoritmu, dokud není dosaženo dostatečně vysoké hodnoty požadovaných otáček. Problematika tohoto jevu bude detailněji diskutována v závěru kapitoly.

Opět je možno pozorovat „budící“ zásahy BK při dosažení nulových otáček. Vzhledem k tomu, že nyní mají podstatně menší amplitudu ve srovnání s amplitudou požadovaných a následně skutečných otáček, je chyba v jejich důsledku již relativně menší a nejedná se o tolik závažný problém.

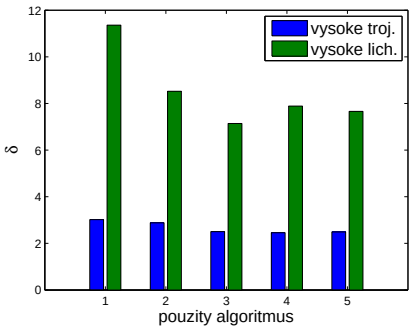
Podobně velké chyby pak dosahuje LQ-CE i LQ-HS. Pro LQ-CE je chyba nepatrně větší pravděpodobně v důsledku trvalé odchylky od požadované hodnoty. Nejlepších



a) nízké otáčky



b) střední otáčky



c) vysoké otáčky

Obrázek 4.14: Dosažené hodnoty středních kvadratických chyb δ pro profily a) *nízké otáčky*, b) *střední otáčky* a c) *vysoké otáčky*. Použité algoritmy jdou v pořadí: 1 – PI, 2 – LQ-CE, 3 – INJ, 4 – BK a 5 – LQ-HS.

výsledků je pak dosaženo užitím INJ.

Detailnější porovnání průběhů hodnoty otáček při průchodu nulou pro jednotlivé algoritmy je znázorněno na obrázku 4.15 c) a d). Zde je možno pozorovat především chybu PI při průchodu nulou a dále pak „budící“ zásahy BK.

4.4.5 Vysoké otáčky

Následuje podrobnější popis chování jednotlivých algoritmů ve vysokých otáčkách. Pro simulace bylo užito trojúhelníkového i lichoběžníkového referenčního profilu *vysoké otáčky*. Vysoké otáčky jsou problematické především z toho hlediska, že se více uplatňuje nelineární charakter PMSM a chyby modelu stroje, například v důsledku linearizace, se projevují více.

Pro vysoké otáčky již nebude uveden celkový náhled na průběh hodnoty ω v čase, protože je pro všechny použité algoritmy vizuálně shodný. Místo toho bude věnována pozornost detailům těchto průběhů, kde lze nalézt rozdílné chování jednotlivých užitých metod. Zmiňované detaily jsou zobrazeny v grafech na obrázku 4.16 a) pro trojúhelníkový a b) pro lichoběžníkový profil požadovaných otáček.

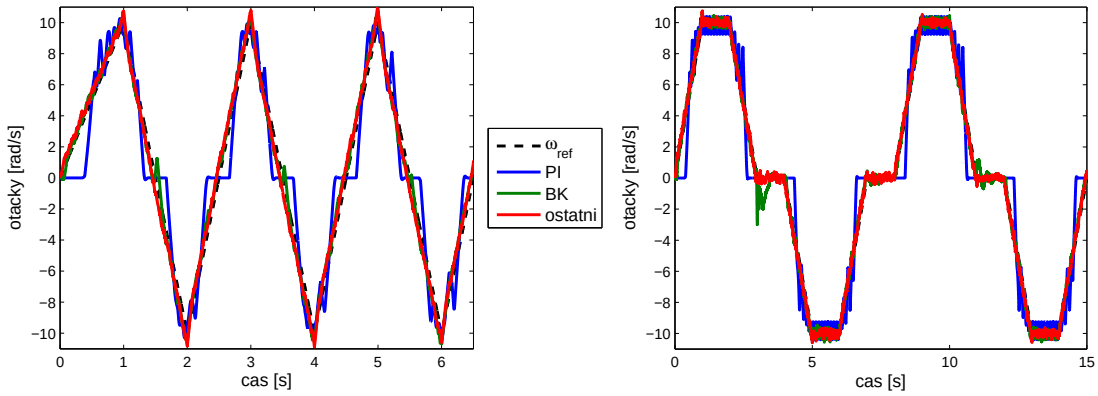
Pro trojúhelníkový profil a) vlevo lze při dosahování nejvyšší hodnoty otáček pozorovat jisté „zpoždění“ skutečné hodnoty za požadovanou. Tento jev je s největší pravděpodobností způsoben úbytky napětí a jejich následnou kompenzací, viz odstavec 4.1.2. Bez užití kompenzace je zmiňovaný pokles skutečné hodnoty výraznější. S užitím kompenzace se jej však nepodařilo zcela odstranit především z důvodu aplikace velmi jednoduché kompenzační techniky, která však musí být aplikovatelná na celé spektrum otáček stroje. Například menší vylepšení chování ve vysokých otáčkách na zobrazeném detailu by mohlo mít za následek výraznější zhoršení v otáčkách nízkých.

Dále je vhodné poukázat na komplikovanější průchod nulou pro PI pro trojúhelníkový profil a) vpravo. Před dosažením nulových otáček zde dochází ke „zvlnění“ trajektorie a tedy k větší chybě oproti ostatním algoritmům, které mají průběh hladší.

Při uvažování lichoběžníkového referenčního profilu b) vlevo je průběh otáček ve vysokých hodnotách pro všechny algoritmy srovnatelný s výjimkou PI. Pro tento řídící návrh dochází před dosažením nejvyšší požadované hodnoty k jistému zpomalení růstu, tento jev pomalejšího růstu lze pak pozorovat i pro trojúhelníkový profil.

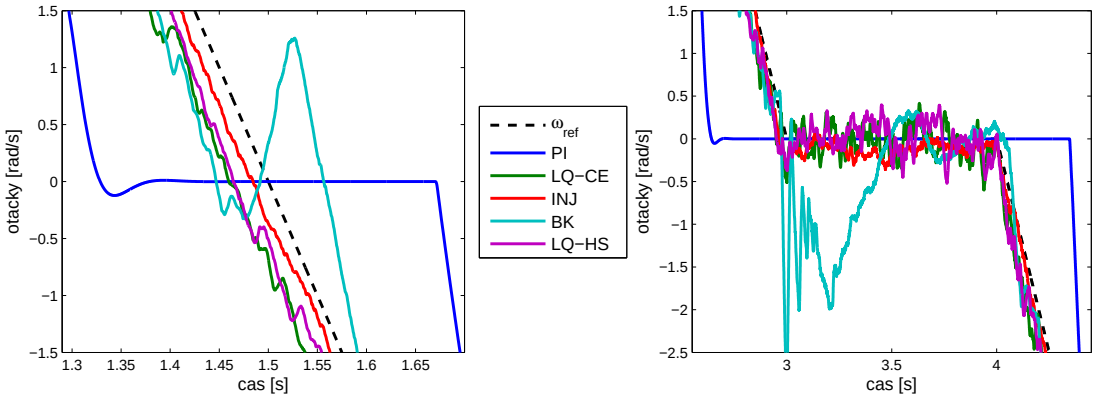
Odlišné chování jednotlivých algoritmů lze pozorovat při průchodu nulou na lichoběžníkovém profilu b) vpravo. Rozdílnost spočívá především ve schopnosti dosáhnout a udržet nulové otáčky. Nejpomalejší průběh při zastavování stroje má PI. O málo rychlejší je BK, která však opět přidává „budící“ zásah. Podobné průběhy mají INJ a LQ-CE, přičemž v druhém případě je dosaženo nulových otáček nepatrně rychleji. Nejrychleji dosahuje nuly LQ-HS, v tomto případě však dojde k jistému přesažení nulové meze a stroj se nepatrně otočí v opačném směru.

Porovnání pro jednotlivé algoritmy na základě dosažených středních kvadratických chyb pak představuje graf na obrázku 4.14 c). Hodnoty jsou poměrně vyrovnané, i když v případě duálních algoritmů je dosaženo nižších chyb. Za pozornost však stojí nízká chyba dosažená za pomoci INJ. Obecně je udáváno problematické chování injektážních technik při vysokých otáčkách a zde je dosaženo výsledků relativně nejlepších ze všech



a) střední otáčky – trojúhelníky

b) střední otáčky – lichoběžníky



c) detail – trojúhelníky

d) detail – lichoběžníky

Obrázek 4.15: Porovnání průběhu hodnoty otáček ω při řízení jednotlivými algoritmy na požadovanou hodnotu ω_{ref} danou profilem *střední otáčky* (a,c) trojúhelníky a (b,d) lichoběžníky. Pod označením *ostatní* jsou rozumněny následující algoritmy: LQ-CE, INJ a LQ-HS. Nahoře (a,b) je celkový pohled na průběh hodnoty otáček v čase a dole (c,d) pak vybraný detail průchodu nulovými otáčkami.

uvažovaných metod. Důvodem pro tyto lepší vlastnosti je s největší pravděpodobností užití spolu s rozšířeným Kalmanovým filtrem a vektorovým LQ řízením. Běžně užívané injektážní metody totiž EKF nepoužívají a jsou založeny na vektorovém řízení s PI regulátory.

4.5 Diskuze výsledků

Výsledky simulací provedených na simulátoru PMSM uvedené v předchozích odstavcích poukázaly na několik zajímavých faktů, které budou nyní ještě podrobněji diskutovány.

4.5.1 Referenční vektorové PI řízení (PI)

Nejprve bude věnována pozornost vektorovému řízení založenému na PI regulátorech. Jedná se o klasický algoritmus užívaný k řízení PMSM a zde byl implementován především jako referenční spolu s EKF jako pozorovatelem. Jeho výsledky lze stručně označit jako nejhorší ze zde prezentovaných algoritmů. Jeho největšími problémy jsou neaktivita při nízkých otáčkách, problematické průchody nulou a „zpomalování“ ve vysokých otáčkách.

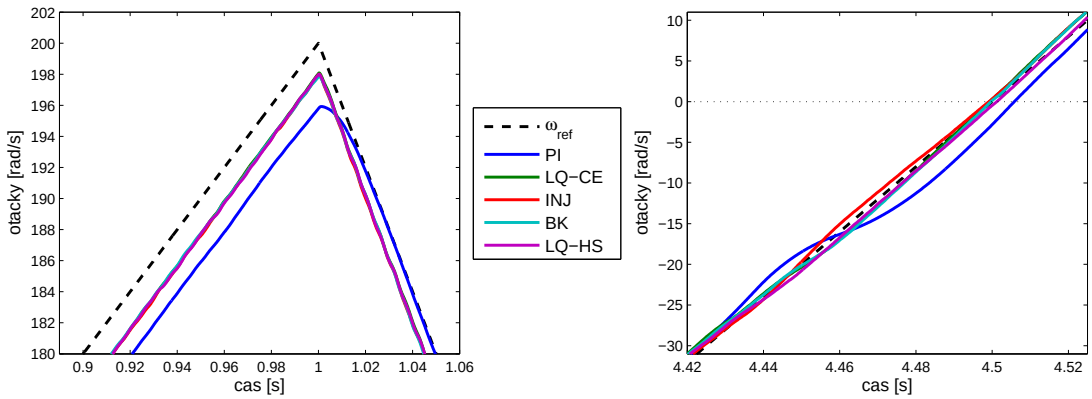
Nejpravděpodobnější příčinou těchto jevů je přílišná „opatrnost“ algoritmu PI. Navrhované řídící zásahy jsou pak v nízkých otáčkách příliš malé a v důsledku chyb způsobených napájecí elektronikou, jako úbytky napětí a mrtvé časy, dojde k úplnému vymizení řídícího zásahu. Použitý pozorovatel (EKF) se o tom však nedozví a předpokládá navržený malý řídící zásah. V důsledku toho pak pozorovatel poskytuje odhad, podle kterého je přesně sledována referenční hodnota otáček, i když ve skutečnosti se nic neděje a stroj se neotáčí. Pro toto vysvětlení svědčí také fakt, že při simulacích provedených pouze na základě *jednoduchého modelu* stroje, který neuvažuje napájecí elektroniku a simuluje PMSM pouze na základě jeho rovnic, k tomuto jevu nedochází, viz obrázek 4.17 a).

Podobnou příčinu lze nalézt i ve „zpomalení“ při vysokých otáčkách. K poklesu růstu rychlosti totiž dochází ve chvíli, kdy je dle odhadu dosaženo požadované hodnoty nebo dokonce hodnoty nepatrně vyšší, viz obrázek 4.17 b). To, že skutečná hodnota otáček dále roste až k hodnotě požadované je pak pravděpodobně způsobeno jiným regulačním mechanizmem než přímo regulací odchylky otáček na nulu.

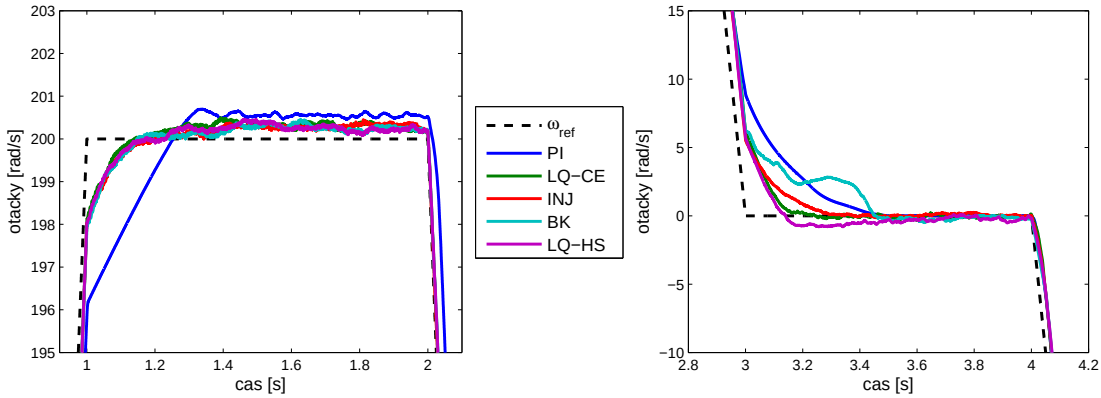
4.5.2 Neduální LQ regulátor (LQ-CE)

Kvůli výše zmiňovaným nedostatkům vektorového PI řízení byla v práci věnována pozornost alternativnímu návrhu vektorového řízení pomocí LQ regulátoru. Jak bylo ukázáno v předchozích odstavcích, především v 4.4 a 4.2.1 při využití LQ namísto PI regulátorů je dosaženo znatelně lepších výsledků.

Aplikace LQ regulátoru na PMSM sebou však nese i jisté komplikace. Především se jedná o výrazně větší výpočetní náročnost, která by mohla být překážkou pro nasazení tohoto regulátoru v reálném čase. Byla proto zkoumána i možnost předpočítaného konstantního LQ regulátoru. Ten sice poskytuje horší výsledky, zejména ve vyšších otáčkách, kdy se výrazněji projeví chyby v důsledku zjednodušení modelu, ale ukazuje se

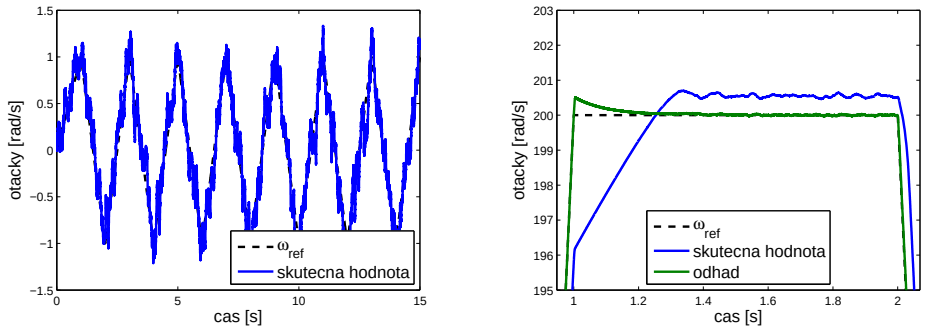


a) detail vysokých otáček – trojúhelníky



b) detail vysokých otáček – lichoběžníky

Obrázek 4.16: Detail průběhu hodnoty otáček ω při řízení jednotlivými algoritmy na požadovanou hodnotu ω_{ref} danou profilem *vysoké otáčky* (a) trojúhelníky a (b) lichoběžníky. Pro (a) i (b) je vždy vlevo detailní pohled na průběh hodnoty otáček v nejvyšším bodě profilu. Vpravo pak je detail průchodu nulovými otáčkami.



a) jednoduchý model b) detail vysokých otáček

Obrázek 4.17: Chování vektorového PI řízení: a) simulace při užití *jednoduchého modelu* stroje na trojúhelníkovém referenčním profilu *nízké otáčky*; b) detail chování ve vysokých otáčkách při užití simulátoru PMSM na profilu *vysoké otáčky* lichoběžníky, kde je zobrazena současně skutečná hodnota otáček ω a její odhad $\hat{\omega}$.

jako relativně použitelná alternativa pro nekonstantní LQ regulátor. Navíc při provedení externího předpočtu na jiném zařízení by jej bylo možno snadno nasadit pro aplikaci v reálném čase díky jeho jednoduchosti.

Použití LQ namísto PI regulátoru pro vektorové řízení se tedy, až na vyšší výpočetní náročnost, ukázalo jako dobrá alternativa a z tohoto návrhu bylo vycházeno i při tvorbě dalších, komplikovanějších algoritmů pro řízení PMSM.

4.5.3 Využití vysokofrekvenční injektáže (INJ)

Injektážní návrh INJ slouží jako zástupce injektážních metod pro srovnání s ostatními algoritmy. Byl však implementován v poněkud odlišné verzi, než jsou injektáže běžně využívány. Jako základní řídící algoritmus bylo použito vektorové řízení založené na LQ regulátoru místo běžně používaných PI regulátorů. To již samo o sobě přináší výhodu vyplývající z lepších výsledků poskytovaných při této volbě regulátoru, viz předchozí odstavec. Další modifikací pak bylo přidání rozšířeného Kalmanova filtru oproti klasickým injektážním metodám v jistém smyslu navíc. V této implementaci lze spatřovat jistý krok směrem k hybridním metodám, které kombinují injektáže s pozorovatelem založeným na zpětné elektromotorické síle. Oproti hybridním metodám však nedochází k omezování injektovaného vysokofrekvenčního signálu s rostoucími otáčkami.

Pomocí této metody se podařilo dosáhnout velmi dobrých výsledků. Je však třeba upozornit, že v užité implementaci se jedná o výpočetně poměrně náročnou metodu. Je totiž třeba v každém časovém kroku počítat algoritmus pro EKF, dále oproti PI výrazně náročnější LQ algoritmus a také současně provádět filtraci vysokofrekvenčního přídavného signálu užitím digitálních filtrů.

Dalším výrazným důvodem, který mluví v neprospěch nejen této ale injektážních metod celkem je fakt, že jsou použitelné pouze na určitou podskupinu PMSM. Aby bylo

možno užít injektáží, je nezbytné, aby byly v samotném stroji přítomny anizotropie nějakého typu. Existují však stroje, které anizotropie nemají nebo jsou příliš malé pro efektivní nasazení metody. Dále existuje více typů anizotropií a každý typ vyžaduje odlišný přístup. Jako hlavní nedostatek injektážních metod lze tedy uvést, že nelze vyvinout univerzální metodu použitelnou pro všechny typy PMSM.

Ohledně injektážních metod je ještě vhodné upozornit na problémy při vyšších otáčkách, kdy dochází ke snížené aplikovatelnosti přístupu a problém je obvykle řešen užitím hybridních injektážních algoritmů.

Zajímavou vlastností injektáží je, že na ně lze pohlížet jako na duální metodu. Opatrnou část reprezentuje použitý řídící algoritmus, obvykle vektorové řízení. Budící část je pak zastoupena přídavným vysokofrekvenčním signálem. Zde je ale třeba zdůraznit výsledky analýzy systému pomocí aposteriorních Cramer-Raových mezí, viz odstavec 4.3.2. Na jejich základě lze totiž zlepšení pozorovatelnosti systému vyhodnotit jako relativně nejmenší z používaných metod. Oproti tomu ale implementovaná metoda podává velmi dobré výsledky co se týče odhadů stavových veličin se špatnou pozorovatelností. Pozitivní vliv na výsledky injektážních metod tedy nelze hledat pouze v přidání budícího signálu, ale především je důležité i jeho vyhodnocování pomocí metod analýzy signálu.

4.5.4 Bikriteriální duální řízení (BK)

Velmi zajímavých výsledků bylo dosaženo aplikací vybraného návrhu bikriteriální metody. I když se jedná o relativně jednoduchý postup může poskytnout dobrou regulaci PMSM. Relativně vyšších hodnot chyby dosahuje tento algoritmus jen při nízkých otáčkách, kdy jsou budící zásahy poměrně velké ve srovnání s amplitudou otáček. Se zvýšením otáček se však velikost těchto zásahů stává zanedbatelnými. Budící zásahy jsou navíc přidávány pouze při dosažení nulových otáček, kdy se stává poloha stroje nepozorovatelným stavem, v budícím zásahu lze tedy spatřovat snahu tuto nepozorovatelnost odstranit. Tento jev lze současně považovat za experimentální ověření faktu, že se skutečně jedná o duální algoritmus, protože budící zásah je přidáván jen, když je opravdu potřeba. V případě bikriteriální metody se ale jedná o velmi jednoduchý suboptimální duální návrh, což se zde projevuje především v tom, že budící zásahy jsou někdy nepřiměřeně velké.

Při srovnání s ostatními algoritmy lze konstatovat, že BK podává lepší výsledky než obyčejné vektorové řízení, zejména při větší neznalosti stavu systému. Oproti zbylým dvěma porovnávaným algoritmům (INJ a LQ-HS) jsou pak dosažené výsledky horší, někdy i znatelně. Na druhou stranu zde uvažovaný návrh bikriteriální metody představuje poměrně jednoduché vylepšení základního vektorového řízení, který by mohl být použitelný pro méně náročné aplikace.

4.5.5 LQ regulátor s hyperstavem (LQ-HS)

Posledním zkoumaným algoritmem bylo využití konceptu hyperstavu. Ten založen na myšlence, že kromě odhadu stavových veličin pracujeme i s jejich kovariancemi a tedy kromě odhadu si uchováváme i informaci o jeho přesnosti. Značnou nevýhodou tohoto

přístupu je pak vyšší výpočetní náročnost. Dále je třeba zmínit, že v případě užití hyperstavu se jedná o suboptimální algoritmus. Především skutečná negaussovská hustota pravděpodobnosti stavových veličin je aproximována pouze na základě prvních dvou momentů. Odhadování a návrh řízení je na hyperstavu prováděn pomocí rozšířeného Kalmanova filtru a LQ regulátoru, které pro PMSM ani pro rovnice kovarianční matice v hyperstavu nejsou optimální, protože se nejedná o lineární systém.

Přes zmiňované nedostatky se podařilo pomocí LQ-HS dosáhnout relativně velmi dobrých výsledků. Dále lze opět konstatovat, že bylo experimentálně potvrzeno, že se jedná o duální algoritmus. Důvodem pro to jsou především výsledky experimentů s neznámým počátečním úhlem natočení, kde se podařilo užitím hyperstavu neznalost efektivně omezovat a to i při požadavku na nulové otáčky. Celý algoritmus je navíc komplexním řešením a ne pouze přidáváním vhodného signálu jako u bikriteriální metody. Také bylo dosaženo lepšího kompromisu mezi *opatrností* a *buzením*. V některých případech sice algoritmus dosáhl vyšší hodnoty chyby řízení, nepodařilo se ale nalézt žádnou systematickou chybu, kterou by buzení způsobovalo.

Navíc pro správnou funkčnost algoritmu LQ-HS není třeba předpokladu různých indukčností v osách $d - q$, tak jako pro injektáže. Lze tedy říci, že pro SMPMSM, které mají velmi malý nebo téměř žádný rozdíl indukčností L_d a L_q dosahuje tento algoritmus nejlepších výsledků ze zde testovaných algoritmů.

4.5.6 Náměty pro další zkoumání

Vzhledem k výsledkům popsaným v předchozím textu existuje několik problémů, které jsou obzvláště vhodné k dalšímu zkoumání:

Jednak by bylo vhodné věnovat se dalšímu výzkumu bikriteriální metody, především způsobu jak omezit v některých případech příliš velké budící zásahy. Dále pak navrhnout takové zjednodušení bikriteriální metody, aby bylo možné ji implementovat pro řízení skutečného PMSM v reálném čase.

Dalším důležitým problémem vhodným k výzkumu je vliv zátěžného momentu. Zátěžný moment v této práci nebyl uvažován, avšak při užití řídících algoritmů pro reálné aplikace je třeba zvládnout práci i s neznámým časově proměnným zátěžným momentem.

Podstatnou záležitostí je i detailnější prozkoumání a vyřešení problému symetrie rovnic popisujících PMSM na substituci $(\omega, \vartheta) \longleftrightarrow (-\omega, \vartheta + \pi)$. Nebo ekvivalentně vyvinutí metody, která zvládne odhadovat polohu v celém intervalu $(-\pi, \pi\rangle$.

Závěr

Hlavním záměrem této práce bylo zkoumání možnosti užití duálního řízení pro regulaci synchronního stroje s permanentními magnety v bezsenzorovém návrhu. V textu je nejdříve přiblížen samotný PMSM, dále jeho matematický popis a běžně užívané postupy pro odhadování a řízení tohoto systému. Následuje kapitola věnovaná řídícím algoritmům s důrazem na řízení duální. Další části textu už jsou zaměřeny na aplikaci konkrétních algoritmů na systém synchronního stroje s permanentními magnety a jejich porovnání a vyhodnocení na základě simulací.

Běžně užívané vektorové řízení založené na PI regulátorech a doplněné rozšířeným Kalmanovým filtrem jako pozorovatelem slouží za referenční, neduální, metodu. Tento základní algoritmus byl modifikován užitím lineárně kvadratického návrhu vektorového řízení. Lineárně kvadratický regulátor je sice výpočetně náročnější než PI regulátory, ale na základě simulací bylo ukázáno, že dosahuje lepších výsledků, především v problematických režimech jako nízké otáčky a průchody nulovými otáčkami. Zatím se však stále nejedná o duální metodu. Lineárně kvadratická verze vektorového řízení pak dále sloužila jako výchozí pro tvorbu složitějších algoritmů.

Dále byly implementovány pokročilejší metody, které měly za cíl zvládnout dobrý běh stroje i v nízkých nebo nulových otáčkách při komplikacích způsobených špatnou pozorovatelností polohy stroje. Právě zlepšení pozorovatelnosti za účelem poskytnutí lepšího řízení je oblastí, kde by se měly s výhodou projevit duální algoritmy.

Za tímto účelem jsou nejběžněji využívány injektážní metody, případně metody hybridní, které kombinují injektáže s jiným typem pozorovatele ve vyšších otáčkách. Jako zástupce těchto metod byl implementován jednoduchý injektážní návrh, který kombinuje vysokofrekvenční injektáž s rozšířeným Kalmanovým filtrem a je dále doplněn lineárně kvadratickým vektorovým řízením. Na rozdíl od hybridních metod však nedochází k omezování injektovaného signálu s rostoucími otáčkami. Pomocí tohoto algoritmu bylo dosaženo velmi dobrých výsledků, což je v souladu s velkým zájmem o injektážní, případně hybridní, metody v odborné literatuře a snaze o nasazení jejich v praxi. Největším nedostatkem injektážních metod jsou však jejich specifické požadavky na konstrukci stroje a tedy nemožnost nasazení na všechny dostupné typy PMSM.

Následujícím testovaným duálním algoritmem bylo užití bikriteriální metody. Podstata tohoto přístupu spočívá ve stanovení dvou kriterií, pro opatrné řízení a optimální buzení, která jsou minimalizována zvlášť. Kvůli komplikacím s nalezením opatrného řízení bylo místo něj užito standardního vektorového řízení založeného buď na LQ nebo PI regulátorech. Pro budící složku bylo zkoumáno několik možností o různé složitosti. Nakonec byla vybrána verze s LQ regulátorem a pěti současně běžícími EKF pro výběr minimální variance jako nejlepší zástupce bikriteriální metody. U tohoto algoritmu se podařilo experimentálně prokázat duální vlastnosti a celkově poskytoval relativně dobré

výsledky. Větším problémem ale bylo chování při nízkých otáčkách, kdy budící zásahy způsobovaly výraznější chybu řízení. Pro méně náročné aplikace by však tento algoritmus mohl být dostačující.

Posledním zkoumaným přístupem k duálnímu řízení byla aplikace hyperstavu. Jedná se v podstatě o rozšíření základního stavu systému o kovariance jednotlivých stavových veličin. V důsledku této úpravy je pak stručně řečeno možno pracovat kromě odhadu těchto veličin i s jejich přesností. Na systém popsaný hyperstavem byl dále použit EKF pro odhadování a LQ regulátor pro vektorové řízení, který navíc zahrnoval i vhodnou penalizaci kovariancí. Experimentálně bylo opět ověřeno, že se jedná o duální přístup a bylo dosaženo relativně velmi dobrých výsledků. Jednoduchý injektážní návrh sice poskytoval výsledky zpravidla lepší, avšak algoritmus s hyperstavem nevyžaduje žádné speciální vlastnosti stroje jako například anizotropie rotoru. Nevýhodou užití hyperstavu je ale poměrně větší výpočetní náročnost, která zatím brání jeho efektivnímu nasazení na skutečném zařízení.

V této práci je předložena alternativa k běžně užívanému vektorovému řízení a je zde prezentován pohled na injektážní metody v rámci duálního řízení. Dále byly na PMSM v bezsenzorovém návrhu aplikovány dvě další duální metody s nimiž se podařilo dosáhnout poměrně velmi dobrých výsledků. Je zde samozřejmě prostor k dalšímu výzkumu a modifikacím, aby bylo možno efektivně nasadit prezentované algoritmy za jakýchkoliv podmínek. V každém případě ale lze konstatovat, že užití konceptu duálního řízení je dobrou cestu řešení problému bezsenzorového řízení synchronních strojů.

Literatura

[1] Åström, K.; Murray, R.: *Feedback Systems: An Introduction for Scientists and Engineers*. Princeton University Press, 2008, ISBN 978-0-691-13576-2.

[2] Bar-Shalom, Y.: Stochastic dynamic programming: Caution and probing. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, ročník 26, č. 5, oct 1981: s. 1184 – 1195, ISSN 0018-9286, doi:10.1109/TAC.1981.1102793.

[3] Bar-Shalom, Y.; Tse, E.: Dual effect, certainty equivalence, and separation in stochastic control. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, ročník 19, č. 5, oct 1974: s. 494 – 500, ISSN 0018-9286, doi:10.1109/TAC.1974.1100635.

[4] Bertsekas D. P.: *Dynamic Programming and Optimal Control*, ročník I. Belmont, Massachusetts: Athena Scientific, třetí vydání, 2005.

[5] Bianchi, N.; Bolognani, S.; Jang, J.-H.; aj.: Comparison of PM Motor Structures and Sensorless Control Techniques for Zero-Speed Rotor Position Detection. *Power Electronics, IEEE Transactions on*, ročník 22, č. 6, 2007: s. 2466–2475, ISSN 0885-8993, doi:10.1109/TPEL.2007.904238.

[6] Bianchi, N.; Bolognani, S.; Jang, J.-H.; aj.: Advantages of Inset PM Machines for Zero-Speed Sensorless Position Detection. *Industry Applications, IEEE Transactions on*, ročník 44, č. 4, 2008: s. 1190–1198, ISSN 0093-9994, doi: 10.1109/TIA.2008.926203.

[7] Bolognani, S.; Oboe, R.; Zigliotto, M.: Sensorless full-digital PMSM drive with EKF estimation of speed and rotor position. *Industrial Electronics, IEEE Transactions on*, ročník 46, č. 1, Únor 1999: s. 184–191, ISSN 0278-0046, doi:10.1109/41.744410.

[8] Bolognani, S.; Tubiana, L.; Zigliotto, M.: EKF-based sensorless IPM synchronous motor drive for flux-weakening applications. *Industry Applications, IEEE Transactions on*, ročník 39, č. 3, 2003: s. 768–775, ISSN 0093-9994, doi: 10.1109/TIA.2003.810666.

[9] Bolognani, S.; Zigliotto, M.; Zordan, M.: Extended-range PMSM sensorless speed drive based on stochastic filtering. *Power Electronics, IEEE Transactions on*, ročník 16, č. 1, Leden 2001: s. 110–117, ISSN 0885-8993, doi:10.1109/63.903995.

[10] Chen, J.-L.; Liu, T.-H.; Chen, C.-L.: Design and implementation of a novel high-performance sensorless control system for interior permanent magnet synchronous motors. *Electric Power Applications, IET*, ročník 4, č. 4, april 2010: s. 226 –240, ISSN 1751-8660.

[11] Consoli, A.; Scarcella, G.; Testa, A.: Industry application of zero-speed sensorless control techniques for PM synchronous motors. *Industry Applications, IEEE Transactions on*, ročník 37, č. 2, 2001: s. 513–521, ISSN 0093-9994, doi: 10.1109/28.913716.

[12] Eskola, M.; Jussila, M.; Tuusa, H.: Indirect matrix converter fed PMSM-sensorless control using carrier injection. In *Power Electronics Specialists Conference, 2004. PESC 04. 2004 IEEE 35th Annual*, ročník 5, 2004, ISSN 0275-9306, s. 4010–4016 Vol.5, doi:10.1109/PESC.2004.1355185.

[13] Favier, G.; Alengrin, G.; Orsini, M.: Square root and fast algorithms for solving the LQG control problem in discrete time systems. In *Decision and Control including the Symposium on Adaptive Processes, 1981 20th IEEE Conference on*, ročník 20, dec. 1981, s. 340 –345, doi:10.1109/CDC.1981.269543.

[14] Favoreel, W.; De Moor, B.; Van Overschee, P.; aj.: Model-free subspace-based LQG-design. In *American Control Conference, 1999. Proceedings of the 1999*, ročník 5, 1999, s. 3372 –3376 vol.5, doi:10.1109/ACC.1999.782390.

[15] Feynman, R.; Leighton, R.; Sands, M.: *Feynmanovy přednášky z fyziky s řešenými příklady 1/3*. Havlíčkův Brod: Fragment, první vydání, 2000, ISBN 80-7200-405-0.

[16] Feynman, R.; Leighton, R.; Sands, M.: *Feynmanovy přednášky z fyziky s řešenými příklady 2/3*. Havlíčkův Brod: Fragment, první vydání, 2001, ISBN 80-7200-420-4.

[17] Filatov, N.; Unbehauen, H.: Survey of adaptive dual control methods. *Control Theory and Applications, IEE Proceedings*, ročník 147, č. 1, Leden 2000: s. 118–128, ISSN 1350-2379, doi:10.1049/ip-cta:20000107.

[18] Filatov, N.; Unbehausen, H.: Adaptive predictive control policy for nonlinear stochastic systems. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, ročník 40, č. 11, Listopad 1995: s. 1943–1949, ISSN 0018-9286, doi:10.1109/9.471221.

[19] Filatov, N. M.; Unbehauen, H.: *Adaptive Dual Control, Theory and Applications*. Lecture Notes in Control and Information Sciences, Springer Berlin / Heidelberg, 2004.

[20] Fišer, O.: *Střídavý regulovaný pohon se synchronním motorem s permanentními magnety*. Dizertační práce, VŠB - Technická univerzita Ostrava, dub 2006.

[21] Flidr, M.; Straka, O.; Simandl, M.: Pruning and merging strategies in receding horizon bicriterial dual controller with multiple linearization. In *Control Automation (MED), 2011 19th Mediterranean Conference on*, june 2011, s. 832 –837, doi:10.1109/MED.2011.5983213.

[22] Foo, G.; Rahman, M.: Sensorless vector control of interior permanent magnet synchronous motor drives at very low speed without signal injection. *Electric Power Applications, IET*, ročník 4, č. 3, march 2010: s. 131 –139, ISSN 1751-8660.

[23] Genduso, F.; Miceli, R.; Rando, C.; aj.: Back EMF Sensorless-Control Algorithm for High-Dynamic Performance PMSM. *Industrial Electronics, IEEE Transactions on*, ročník 57, č. 6, june 2010: s. 2092 –2100, ISSN 0278-0046.

[24] Hammel, W.; Kennel, R.: Position sensorless control of PMSM by synchronous injection and demodulation of alternating carrier voltage. In *Sensorless Control for Electrical Drives (SLED), 2010 First Symposium on*, july 2010, s. 56 –63, doi: 10.1109/SLED.2010.5542801.

[25] Harnefors, L.; Nee, H.-P.: A general algorithm for speed and position estimation of AC motors. *Industrial Electronics, IEEE Transactions on*, ročník 47, č. 1, Únor 2000: s. 77–83, ISSN 0278-0046, doi:10.1109/41.824128.

[26] Holtz, J.: Sensorless Control of Induction Machines – With or Without Signal Injection? *Industrial Electronics, IEEE Transactions on*, ročník 53, č. 1, feb. 2005: s. 7 – 30, ISSN 0278-0046, doi:10.1109/TIE.2005.862324.

[27] Jang, J.-H.; Sul, S.-K.; Ha, J.-I.; aj.: Sensorless drive of surface-mounted permanent-magnet motor by high-frequency signal injection based on magnetic saliency. *Industry Applications, IEEE Transactions on*, ročník 39, č. 4, 2003: s. 1031–1039, ISSN 0093-9994, doi:10.1109/TIA.2003.813734.

[28] Kang, K.-L.; Kim, J.-M.; Hwang, K.-B.; aj.: Sensorless control of PMSM in high speed range with iterative sliding mode observer. In *Applied Power Electronics Conference and Exposition, 2004. APEC '04. Nineteenth Annual IEEE*, 2004.

[29] Kim, H.; Lorenz, R.: Carrier signal injection based sensorless control methods for IPM synchronous machine drives. In *Industry Applications Conference, 2004. 39th IAS Annual Meeting. Conference Record of the 2004 IEEE*, ročník 2, 2004, ISSN 0197-2618, s. 977–984 vol.2, doi:10.1109/IAS.2004.1348532.

[30] Kim, H.; Yi, S.; Kim, N.; aj.: Using low resolution position sensors in bumpless position/speed estimation methods for low cost PMSM drives. In *Industry Applications Conference, 2005. Fourtieth IAS Annual Meeting. Conference Record of the 2005*, ročník 4, 2005, ISSN 0197-2618, s. 2518–2525 Vol. 4, doi:10.1109/IAS.2005.1518814.

[31] Kim, J.; Rock, S. M.: Stochastic Feedback Controller Design Considering the Dual Effect. In *Proceedings of the AIAA Guidance, Navigation and Control Conference*, Keystone, CO, August 2006.

[32] Lee, J.; Hong, J.; Nam, K.; aj.: Sensorless Control of Surface-Mount Permanent-Magnet Synchronous Motors Based on a Nonlinear Observer. *Power Electronics, IEEE Transactions on*, ročník 25, č. 2, feb. 2010: s. 290 –297, ISSN 0885-8993.

[33] Linke, M.; Kennel, R.; Holtz, J.: Sensorless position control of permanent magnet synchronous machines without limitation at zero speed. In *IECON 02 [Industrial Electronics Society, IEEE 2002 28th Annual Conference of the]*, ročník 1, 2002, s. 674–679 vol.1, doi:10.1109/IECON.2002.1187588.

[34] Linke, M.; Kennel, R.; Holtz, J.: Sensorless speed and position control of synchronous machines using alternating carrier injection. In *Electric Machines and Drives Conference, 2003. IEMDC'03. IEEE International*, ročník 2, 2003, s. 1211–1217 vol.2, doi:10.1109/IEMDC.2003.1210394.

[35] de M Fernandes, E.; Oliveira, A.; Jacobina, C.; aj.: Comparison of HF signal injection methods for sensorless control of PM synchronous motors. In *Applied Power Electronics Conference and Exposition (APEC), 2010 Twenty-Fifth Annual IEEE*, feb. 2010, ISSN 1048-2334, s. 1984 –1989, doi:10.1109/APEC.2010.5433506.

[36] Molavi, R.; Shojaee, K.; Khaburi, D.: Optimal vector control of permanent magnet synchronous motor. In *Power and Energy Conference, 2008. PECon 2008. IEEE 2nd International*, dec. 2008, s. 249 –253, doi:10.1109/PECON.2008.4762479.

[37] Morimoto, S.; Kawamoto, K.; Sanada, M.; aj.: Sensorless control strategy for salient-pole PMSM based on extended EMF in rotating reference frame. In *Industry Applications Conference, 2001. Thirty-Sixth IAS Annual Meeting. Conference Record of the 2001 IEEE*, ročník 4, 2001, s. 2637–2644 vol.4, doi:10.1109/IAS.2001.955991.

[38] Novák, J.: Uplatnění synchronních strojů v dopravní technice. *Elektro*, čvn-zář 2006.

[39] Pacas, M.: Sensorless Drives in Industrial Applications. *Industrial Electronics Magazine, IEEE*, ročník 5, č. 2, june 2011: s. 16 –23, ISSN 1932-4529.

[40] Paturca, S. V.; Covrig, M.; Melcescu, L.: Direct Torque Control of Permanent Magnet Synchronous Motor (PMSM) - an approach by using Space Vector Modulation (SVM). In *Proceedings of the 6th WSEAS/IASME Int. Conf. on Electric Power Systems, High Voltages, Electric Machines*, 2006.

[41] Peroutka, Z.; Smidl, V.; Vosmik, D.: Challenges and limits of extended Kalman Filter based sensorless control of permanent magnet synchronous machine drives. In *Power Electronics and Applications, 2009. EPE '09. 13th European Conference on*, sept. 2009, s. 1 –11.

[42] Persson, J.; Markovic, M.; Perriard, Y.: A new standstill position detection technique for non-salient PMSM's using the magnetic anisotropy method (MAM). In *Industry Applications Conference, 2005. Fourtieth IAS Annual Meeting. Conference Record of the 2005*, ročník 1, 2005, ISSN 0197-2618, s. 238–244 Vol. 1, doi: 10.1109/IAS.2005.1518316.

[43] Piippo, A.; Hinkkanen, M.; Luomi, J.: Sensorless control of PMSM drives using a combination of voltage model and HF signal injection. In *Industry Applications Conference, 2004. 39th IAS Annual Meeting. Conference Record of the 2004 IEEE*, ročník 2, 2004, ISSN 0197-2618, s. 964–970 vol.2, doi:10.1109/IAS.2004.1348530.

[44] Piippo, A.; Hinkkanen, M.; Luomi, J.: Analysis of an Adaptive Observer for Sensorless Control of Interior Permanent Magnet Synchronous Motors. *Industrial Electro-*

nics, IEEE Transactions on, ročník 55, č. 2, 2008: s. 570–576, ISSN 0278-0046, doi:10.1109/TIE.2007.911949.

[45] Piippo, A.; Salomaki, J.; Luomi, J.: Signal Injection in Sensorless PMSM Drives Equipped With Inverter Output Filter. *Industry Applications, IEEE Transactions on*, ročník 44, č. 5, 2008: s. 1614–1620, ISSN 0093-9994, doi: 10.1109/TIA.2008.2002274.

[46] Rebeiro, M. I.: Kalman and Extended Kalman Filters: Concept, Derivation and Properties. [cit. 2012-04-08] Dostupné z: http://users.isr.ist.utl.pt, 2004, Institute for Systems and Robotics, Lisboa Technical University.

[47] Scharf, L. L.; McWhorter, L.: Geometry of the Cramer-Rao bound. *Signal Processing*, ročník 31, č. 3, 1993: s. 301 – 311, ISSN 0165-1684, doi:10.1016/0165-1684(93)90088-R.

[48] Schmidt, P.; Gasperi, M.; Ray, G.; aj.: Initial rotor angle detection of a nonsalient pole permanent magnet synchronous machine. In *Industry Applications Conference, 1997. Thirty-Second IAS Annual Meeting, IAS '97., Conference Record of the 1997 IEEE*, ročník 1, Říjen 1997, s. 459–463 vol.1, doi:10.1109/IAS.1997.643063.

[49] Sebald, A. V.: A computationally efficient optimal solution to the LQG discrete time dual control problem. In *Decision and Control including the 17th Symposium on Adaptive Processes, 1978 IEEE Conference on*, ročník 17, jan. 1978, s. 1160–1165, doi:10.1109/CDC.1978.268117.

[50] Seok, J.-K.; Lee, J.-K.; Lee, D.-C.: Sensorless speed control of nonsalient permanent-magnet synchronous motor using rotor-position-tracking PI controller. *Industrial Electronics, IEEE Transactions on*, ročník 53, č. 2, 2006: s. 399–405, ISSN 0278-0046, doi:10.1109/TIE.2006.870728.

[51] Silva, C.; Asher, G.; Sumner, M.: Hybrid rotor position observer for wide speed-range sensorless PM motor drives including zero speed. *Industrial Electronics, IEEE Transactions on*, ročník 53, č. 2, 2006: s. 373–378, ISSN 0278-0046, doi: 10.1109/TIE.2006.870867.

[52] Tichavsky, P.; Muravchik, C.; Nehorai, A.: Posterior Cramer-Rao bounds for discrete-time nonlinear filtering. *Signal Processing, IEEE Transactions on*, ročník 46, č. 5, may 1998: s. 1386 –1396, ISSN 1053-587X, doi:10.1109/78.668800.

[53] Urlep, E.; Jezernik, K.: Low and Zero Speed Sensorless Control of nonsalient PMSM. In *Industrial Electronics, 2007. ISIE 2007. IEEE International Symposium on*, 2007, s. 2238–2243, doi:10.1109/ISIE.2007.4374956.

[54] Vahala, M.: Metody duálního řízení elektrických pohonů, Výzkumný úkol. 2011, FJFI ČVUT Praha.

[55] Černý, O.; Doleček, R.; Novák, J.: Synchronní motory s permanentními magnety pro trakční pohony kolejových vozidel. *Vědockotechnický sborník ČD*, , č. 29, 2010.

[56] Šmídl, V.; Peroutka, Z.: Marginalized Particle Filter for Sensorless Control of Induction Drives. In *IECON 2012, 38th Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society*, 2012, submited.

[57] Šmídl, V.; Quinn, A.: *The Variational Bayes Method in Signal Processing*. Signals and Communication Technology, Springer Berlin Heidelberg, 2006, ISBN 978-3-540-28820-6.

[58] Štulrajter, M.; Hrabovcová, V.; Franko, M.: Permanent magnets synchronous motor control theory. *Journal of Electrical Engineering*, ročník 58, č. 2, 2007: s. 79–84.

[59] Wallmark, O.; Harnefors, L.; Carlson, O.: Control Algorithms for a Fault-Tolerant PMSM Drive. *Industrial Electronics, IEEE Transactions on*, ročník 54, č. 4, 2007: s. 1973 –1980, ISSN 0278-0046, doi:10.1109/TIE.2007.895076.

[60] Welch, G.; Bishop, G.: An introduction to the Kalman filter. [cit. 2012-04-08] Dostupné z: http://www.cs.unc.edu, 2006, UNC-Chapel Hill.

[61] Yongdong, L.; Hao, Z.: Sensorless control of permanent magnet synchronous motor – a survey. In *Vehicle Power and Propulsion Conference, 2008. VPPC '08. IEEE*, sept. 2008, s. 1 –8.

Příloha – LQG pro různé indukčnosti

V příloze jsou zařazeny složitější formální úpravy výrazů, které nejsou zařazeny v hlavní části textu především z důvodu jejich komplikovaného zápisu. Tyto výpočty byly prováděny především za pomoci symbolických výpočtů v programu Matlab (Symbolic Math Toolbox).

Rovnice v souřadné soustavě $\alpha - \beta$ pro různé indukčnosti

Diferenciální rovnice systému v souřadné soustavě $\alpha - \beta$ pro různé indukčnosti L_d a L_q jsou získány z rovnic (1.18), kdy je užito transformací (1.1) a (1.2):

$$\begin{aligned}
\frac{di_\alpha}{dt} &= \cos\vartheta\left(\frac{u_d}{L_d} - \frac{R_s i_d}{L_d} - i_\beta\omega\cos\vartheta + i_\alpha\omega\sin\vartheta + \frac{L_q\omega i_q}{L_d}\right) - \\
&- \sin\vartheta\left(\frac{u_q}{L_q} - \frac{R_s i_q}{L_q} + i_\alpha\omega\cos\vartheta + i_\beta\omega\sin\vartheta - \frac{\omega\psi_{pm}}{L_q} - \frac{L_d\omega i_d}{L_q}\right), \\
\frac{di_\beta}{dt} &= \cos\vartheta\left(\frac{u_q}{L_q} - \frac{R_s i_q}{L_q} + i_\alpha\omega\cos\vartheta + i_\beta\omega\sin\vartheta - \frac{\omega\psi_{pm}}{L_q} + \frac{L_d\omega i_d}{L_q}\right) + \\
&+ \sin\vartheta\left(\frac{u_d}{L_d} - \frac{R_s i_d}{L_d} - i_\beta\omega\cos\vartheta + i_\alpha\omega\sin\vartheta + \frac{L_q\omega i_q}{L_d}\right), \\
\frac{d\omega}{dt} &= \frac{k_p p_p^2\left(\psi_{pm} i_q + (L_d - L_q)\, i_d i_q\right)}{J} - \frac{B\omega}{J}, \\
\frac{d\vartheta}{dt} &= \omega,
\end{aligned}$$

kde

$$\begin{aligned}
i_d &= i_\alpha\cos\vartheta + i_\beta\sin\vartheta, \\
i_q &= i_\beta\cos\vartheta - i_\alpha\sin\vartheta, \\
u_d &= u_\alpha\cos\vartheta + u_\beta\sin\vartheta, \\
u_q &= u_\beta\cos\vartheta - u_\alpha\sin\vartheta.
\end{aligned}$$

Následuje provedení diskretizace náhradou derivace konečnou diferencí

$$\frac{dx}{dt}(t) = \frac{x_{t+1} - x_t}{\Delta t}$$

s výsledkem:

$$\begin{aligned}
i_{\alpha,t+1} &= i_{\alpha,t} + \Delta t \left(\cos\vartheta_t \left(\frac{u_{d,t}}{L_d} - \frac{R_s i_{d,t}}{L_d} - i_{\beta,t}\omega_t \cos\vartheta_t + i_{\alpha,t}\omega_t \sin\vartheta_t + \frac{L_q \omega_t i_{q,t}}{L_d} \right) - \right. \\
&- \left. \sin\vartheta_t \left(\frac{u_{q,t}}{L_q} - \frac{R_s i_{q,t}}{L_q} + i_{\alpha,t}\omega_t \cos\vartheta_t + i_{\beta,t}\omega_t \sin\vartheta_t - \frac{\omega_t \psi_{pm}}{L_q} - \frac{L_d \omega_t i_{d,t}}{L_q} \right) \right), \\
i_{\beta,t+1} &= i_{\beta,t} + \Delta t \left(\cos\vartheta_t \left(\frac{u_{q,t}}{L_q} - \frac{R_s i_{q,t}}{L_q} + i_{\alpha,t}\omega_t \cos\vartheta_t + i_{\beta,t}\omega_t \sin\vartheta_t - \frac{\omega_t \psi_{pm}}{L_q} + \right. \right. \\
&+ \left. \left. \frac{L_d \omega_t i_{d,t}}{L_q} \right) + \sin\vartheta_t \left(\frac{u_{d,t}}{L_d} - \frac{R_s i_{d,t}}{L_d} - i_{\beta,t}\omega_t \cos\vartheta_t + i_{\alpha,t}\omega_t \sin\vartheta_t + \frac{L_q \omega_t i_{q,t}}{L_d} \right) \right), \\
\omega_{t+1} &= \omega_t + \Delta t \frac{k_p p_p^2 \left(\psi_{pm} i_{q,t} + \left(L_d - L_q \right) i_{d,t} i_{q,t} \right)}{J} - \Delta t \frac{B\omega_t}{J}, \\
\vartheta_{t+1} &= \vartheta_t + \Delta t \omega_t,
\end{aligned}$$

kde

$$\begin{aligned}
i_{d,t} &= i_{\alpha,t} \cos\vartheta_t + i_{\beta,t} \sin\vartheta_t, \\
i_{q,t} &= i_{\beta,t} \cos\vartheta_t - i_{\alpha,t} \sin\vartheta_t, \\
u_{d,t} &= u_{\alpha,t} \cos\vartheta_t + u_{\beta,t} \sin\vartheta_t, \\
u_{q,t} &= u_{\beta,t} \cos\vartheta_t - u_{\alpha,t} \sin\vartheta_t.
\end{aligned}$$

Dále je výpočtena Jacobiho matice parciálních derivací stavových veličin $i_{\alpha,t+1}$, $i_{\beta,t+1}$, ω_{t+1} a ϑ_{t+1} dle veličin stejného stavu v předchozím čase $i_{\alpha,t}$, $i_{\beta,t}$, ω_t a ϑ_t:

Derivace $i_{\alpha,t+1}$

$$\begin{aligned}
\frac{di_{\alpha,t+1}}{di_{\alpha,t}} &= \frac{L_q - \Delta t R_s \sin^2\vartheta}{L_q} - \frac{\Delta t L_q \left(L_q \omega \sin\vartheta \cos\vartheta + R_s \cos^2\vartheta \right)}{L_d L_q} + \\
&+ \frac{\Delta t L_d \omega \sin\vartheta \cos\vartheta}{L_q} \\
\frac{di_{\alpha,t+1}}{di_{\beta,t}} &= \frac{\Delta t \left(L_d - L_q \right) \left(-L_q \omega \cos^2\vartheta + R_s \sin\vartheta \cos\vartheta + L_d \omega \sin^2\vartheta \right)}{L_d L_q} \\
\frac{di_{\alpha,t+1}}{di\omega_t} &= \frac{\Delta t L_d \left(-L_d i_\beta \cos^2\vartheta + L_d i_\alpha \sin\vartheta \cos\vartheta + L_d i_\beta - L_q i_\beta + \psi_{pm} \sin\vartheta \right)}{L_d L_q} + \\
&+ \frac{\Delta t L_q^2 \left(i_\beta \cos^2\vartheta - i_\alpha \sin\vartheta \cos\vartheta \right)}{L_d L_q} \\
\frac{di_{\alpha,t+1}}{d\vartheta_t} &= \frac{\Delta t \left(\omega \psi_{pm} \cos\vartheta + R_s i_\beta \cos 2\vartheta - R_s i_\alpha \sin 2\vartheta \right)}{L_q} + \\
&+ \frac{\Delta t L_d \left(i_\alpha \omega \cos 2\vartheta + i_\beta \omega \sin 2\vartheta \right)}{L_q} - \\
&- \frac{\Delta t L_q \left(L_q i_\alpha \omega \cos 2\vartheta + L_q i_\beta \omega \sin 2\vartheta + R_s i_\beta \cos 2\vartheta - R_s i_\alpha \sin 2\vartheta \right)}{L_d L_q}
\end{aligned}$$

Derivace $i_{\beta,t+1}$

$$
\begin{aligned}
\frac{di_{\beta,t+1}}{di_{\alpha,t}} &= \frac{\Delta t\left(L_d - L_q\right)\left(-L_d\omega\cos^2\vartheta + R_s\sin\vartheta\cos\vartheta + L_q\omega\sin^2\vartheta\right)}{L_dL_q} \\
\frac{di_{\beta,t+1}}{di_{\beta,t}} &= \frac{L_q - \Delta tR_s\cos^2\vartheta}{L_q} - \frac{\Delta tL_q\left(-L_q\omega\sin\vartheta\cos\vartheta + R_s\sin^2\vartheta\right)}{L_dL_q} - \\
&- \frac{\Delta tL_d\omega\sin\vartheta\cos\vartheta}{L_q} \\
\frac{di_{\beta,t+1}}{di\omega_t} &= -\frac{\Delta tL_d\left(L_di_\alpha\cos^2\vartheta + L_di_\beta\sin\vartheta\cos\vartheta - L_qi_\alpha + \psi_{pm}\cos\vartheta\right)}{L_dL_q} + \\
&- \frac{\Delta tL_q^2\left(-i_\alpha\cos^2\vartheta - i_\beta\sin\vartheta\cos\vartheta + i_\alpha\right)}{L_dL_q} \\
\frac{di_{\beta,t+1}}{d\vartheta_t} &= \frac{\Delta t\left(\omega\psi_{pm}\sin\vartheta + R_si_\alpha\cos 2\vartheta + R_si_\beta\sin 2\vartheta\right)}{L_q} + \\
&+ \frac{\Delta tL_d\left(-i_\beta\omega\cos 2\vartheta + i_\alpha\omega\sin 2\vartheta\right)}{L_q} - \\
&- \frac{\Delta tL_q\left(-L_qi_\beta\omega\cos 2\vartheta + L_qi_\alpha\omega\sin 2\vartheta + R_si_\alpha\cos 2\vartheta + R_si_\beta\sin 2\vartheta\right)}{L_dL_q}
\end{aligned}
$$

Derivace ω_{t+1}

$$
\begin{aligned}
\frac{d\omega_{t+1}}{di_{\alpha,t}} &= -\frac{\Delta tk_pp_p^2\left(\psi_{pm}\sin\vartheta + \left(L_d - L_q\right)\left(-i_\beta\cos 2\vartheta + i_\alpha\sin 2\vartheta\right)\right)}{J} \\
\frac{d\omega_{t+1}}{di_{\beta,t}} &= \frac{\Delta tk_pp_p^2\left(\psi_{pm}\cos\vartheta + \left(L_d - L_q\right)\left(i_\alpha\cos 2\vartheta + i_\beta\sin 2\vartheta\right)\right)}{J} \\
\frac{d\omega_{t+1}}{d\omega_t} &= 1 - \frac{B\Delta t}{J} \\
\frac{d\omega_{t+1}}{d\vartheta_t} &= -\frac{\Delta tk_pp_p^2}{J}\left(\psi_{pm}\left(i_\alpha\cos\vartheta + i_\beta\sin\vartheta\right) + \right. \\
&+ \left.\left(L_d - L_q\right)\left(i_\alpha^2\cos 2\vartheta - i_\beta^2\cos 2\vartheta + 2i_\alpha i_\beta\sin 2\vartheta\right)\right)
\end{aligned}
$$

Derivace ϑ_{t+1}

$$\begin{aligned}
\frac{d\vartheta_{t+1}}{di_{\alpha,t}} &= 0 \\
\frac{d\vartheta_{t+1}}{di_{\beta,t}} &= 0 \\
\frac{d\vartheta_{t+1}}{d\omega_t} &= \Delta t \\
\frac{d\vartheta_{t+1}}{d\vartheta_t} &= 1
\end{aligned}$$

Matice pro EKF

Jednotlivé výše uvedené derivace lze již rovnou použít do matice A_t rozšířeného Kalmanova filtru, když za příslušné veličiny dosadíme jejich odhady v čase t. Matice A_t je pak ve tvaru

$$A_t = \begin{bmatrix}
\frac{di_{\alpha,t+1}}{di_{\alpha,t}} & \frac{di_{\alpha,t+1}}{di_{\beta,t}} & \frac{di_{\alpha,t+1}}{d\omega_t} & \frac{di_{\alpha,t+1}}{d\vartheta_t} \\
\frac{di_{\beta,t+1}}{di_{\alpha,t}} & \frac{di_{\beta,t+1}}{di_{\beta,t}} & \frac{di_{\beta,t+1}}{d\omega_t} & \frac{di_{\beta,t+1}}{d\vartheta_t} \\
\frac{d\omega_{t+1}}{di_{\alpha,t}} & \frac{d\omega_{t+1}}{di_{\beta,t}} & \frac{d\omega_{t+1}}{d\omega_t} & \frac{d\omega_{t+1}}{d\vartheta_t} \\
\frac{d\vartheta_{t+1}}{di_{\alpha,t}} & \frac{d\vartheta_{t+1}}{di_{\beta,t}} & \frac{d\vartheta_{t+1}}{d\omega_t} & \frac{d\vartheta_{t+1}}{d\vartheta_t}
\end{bmatrix}.$$

Matice C je stejná jako v případě stejných indukčností.

Redukovaný model

V případě redukovaného modelu pro různé indukčnosti, jsou matice A_t a C_t pro užití v EKF ve tvaru

$$\begin{aligned}
A_t &= \begin{bmatrix}
\frac{d\omega_{t+1}}{d\omega_t} & \frac{d\omega_{t+1}}{d\vartheta_t} \\
\frac{d\vartheta_{t+1}}{d\omega_t} & \frac{d\vartheta_{t+1}}{d\vartheta_t}
\end{bmatrix}, \\
C_t &= \begin{bmatrix}
\frac{di_{\alpha,t+1}}{d\omega_t} & \frac{di_{\alpha,t+1}}{d\vartheta_t} \\
\frac{di_{\beta,t+1}}{d\omega_t} & \frac{di_{\beta,t+1}}{d\vartheta_t}
\end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Matice pro LQ regulátor

Pro použití matice A_t v LQ regulátoru je třeba provést její úpravu zahrnutím konstantních členů v důsledku linearizace a řízení na nenulové požadované otáčky, tedy substituce 3.3. Upravená matice je v blokovém tvaru

$$\overline{A}_t = \begin{bmatrix} A_t & \gamma \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

kde 0 představuje nulový řádek vhodné délky a γ je sloupcový vektor

$$\gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \\ \gamma_4 \end{pmatrix}$$

s hodnotami

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= -\frac{\Delta t}{2L_dL_q}\Big(2L_d^2 i_\beta\psi\sin^2\vartheta + 2L_q^2 i_\beta\psi\cos^2\vartheta + L_d^2 i_\alpha\psi\sin 2\vartheta - L_q^2 i_\alpha\psi\sin 2\vartheta - \\
&- 2L_d\psi_{pm}\overline{\omega}\sin\vartheta - 2L_dL_q i_\beta\psi + 2L_dR_s i_\beta\vartheta\cos 2\vartheta - 2L_qR_s i_\beta\vartheta\cos 2\vartheta - \\
&- 2L_dR_s i_\alpha\vartheta\sin 2\vartheta + 2L_qR_s i_\alpha\vartheta\sin 2\vartheta + 2L_d^2 i_\alpha\psi\vartheta\cos 2\vartheta - 2L_q^2 i_\alpha\psi\vartheta\cos 2\vartheta + \\
&+ 2L_d^2 i_\alpha\overline{\omega}\vartheta\cos 2\vartheta - 2L_q^2 i_\alpha\overline{\omega}\vartheta\cos 2\vartheta + 2L_d^2 i_\beta\psi\vartheta\sin 2\vartheta - 2L_q^2 i_\beta\psi\vartheta\sin 2\vartheta + \\
&+ 2L_d^2 i_\beta\overline{\omega}\vartheta\sin 2\vartheta - 2L_q^2 i_\beta\overline{\omega}\vartheta\sin 2\vartheta + 2L_d\psi_{pm}\psi\vartheta\cos\vartheta + 2L_d\psi_{pm}\overline{\omega}\vartheta\cos\vartheta\Big),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_2 &= \frac{\Delta t}{2L_dL_q}\Big(2L_q^2 i_\alpha\psi\sin^2\vartheta 2L_d^2 i_\alpha\psi\cos^2\vartheta L_d^2 i_\beta\psi\sin 2\vartheta - L_q^2 i_\beta\psi\sin 2\vartheta - \\
&- 2L_d\psi_{pm}\overline{\omega}\cos\vartheta - 2L_dL_q i_\alpha\psi - 2L_dR_s i_\alpha\vartheta\cos 2\vartheta + 2L_qR_s i_\alpha\vartheta\cos 2\vartheta - \\
&- 2L_dR_s i_\beta\vartheta\sin 2\vartheta + 2L_qR_s i_\beta\vartheta\sin 2\vartheta + 2L_d^2 i_\beta\psi\vartheta\cos 2\vartheta - 2L_q^2 i_\beta\psi\vartheta\cos 2\vartheta + \\
&+ 2L_d^2 i_\beta\overline{\omega}\vartheta\cos 2\vartheta - 2L_q^2 i_\beta\overline{\omega}\vartheta\cos 2\vartheta - 2L_d^2 i_\alpha\psi\vartheta\sin 2\vartheta + 2L_q^2 i_\alpha\psi\vartheta\sin 2\vartheta - \\
&- 2L_d^2 i_\alpha\overline{\omega}\vartheta\sin 2\vartheta + 2L_q^2 i_\alpha\overline{\omega}\vartheta\sin 2\vartheta - 2L_d\psi_{pm}\psi\vartheta\sin\vartheta - 2L_d\psi_{pm}\overline{\omega}\vartheta\sin\vartheta\Big),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_3 &= \frac{\Delta t}{2J}\Big(L_d i_\alpha^2 k_p p_p^2\sin 2\vartheta - 2B\overline{\omega} - L_d i_\beta^2 k_p p_p^2\sin 2\vartheta - L_q i_\alpha^2 k_p p_p^2\sin 2\vartheta + \\
&+ L_q i_\beta^2 k_p p_p^2\sin 2\vartheta + 2i_\alpha k_p p_p^2\psi_{pm}\vartheta\cos\vartheta + 2i_\beta k_p p_p^2\psi_{pm}\vartheta\sin\vartheta - \\
&- 2L_d i_\alpha i_\beta k_p p_p^2\cos 2\vartheta + 2L_q i_\alpha i_\beta k_p p_p^2\cos 2\vartheta + 2L_d i_\alpha^2 k_p p_p^2\vartheta\cos 2\vartheta - \\
&- 2L_d i_\beta^2 k_p p_p^2\vartheta\cos 2\vartheta - 2L_q i_\alpha^2 k_p p_p^2\vartheta\cos 2\vartheta + 2L_q i_\beta^2 k_p p_p^2\vartheta\cos 2\vartheta + \\
&+ 4L_d i_\alpha i_\beta k_p p_p^2\vartheta\sin 2\vartheta - 4L_q i_\alpha i_\beta k_p p_p^2\vartheta\sin 2\vartheta\Big),
\end{aligned}$$

$$\gamma_4 = \Delta t\overline{\omega}.$$

Dále je pro LQ regulátor nutno uvést matici B_t, ta je nyní závislá na čase a má zápis

$$B_t = \begin{bmatrix} \Delta t\left(\frac{\cos^2\vartheta}{L_d} + \frac{\sin^2\vartheta}{L_q}\right) & \frac{\Delta t}{2}\sin 2\vartheta\left(\frac{1}{L_d} - \frac{1}{L_q}\right) \\ \frac{\Delta t}{2}\sin 2\vartheta\left(\frac{1}{L_d} - \frac{1}{L_q}\right) & \Delta t\left(\frac{\cos^2\vartheta}{L_q} + \frac{\sin^2\vartheta}{L_d}\right) \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$