

Výpočet PCRB

December 12, 2011

PCRB obecně

Výpočet PCRB (Posterior Cramer-Rao Bound) dle [Posterior Cramer-Rao Bounds for Discrete-Time Nonlinear Filtering, 1998, Tichavský P. et al.] jako:

$$P \triangleq \mathbf{E} \left\{ [g(x) - \theta] [g(x) - \theta]^T \right\} \geq J^{-1}$$

kde x reprezentuje vektor měřených dat, θ je vektorový estimovaný náhodný parametr a $g(x)$ je funkce x , která je odhadem θ . J je (Fisherova) informační matice

$$J_{ij} = \mathbf{E} \left[-\frac{\partial^2 \log p_{x,\theta}(X, \Theta)}{\partial \Theta_i \partial \Theta_j} \right]$$

kde $p_{x,\theta}(X, \Theta)$ je sdružená hustota pravděpodobnosti dvojice (x, θ) .

PCRB nelineární filtrace

Spodní mez pro nelineární filtrační problém systému

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f_n(x_n, w_n) \\ z_n &= h_n(x_n, v_n) \end{aligned}$$

kde x_n je stav systému v čase n , z_n je pozorování v čase n , w a v jsou vzájemně nezávislé bílé procesy a f_n a h_n jsou obecně nelineární funkce. Pak je možné počítat rekurzivně posloupnost matic J_n jako:

$$J_{n+1} = D_n^{22} - D_n^{21} (J_n + D_n^{11})^{-1} D_n^{12} \quad (1)$$

kde se matice D_n počítají jako

$$\begin{aligned} D_n^{11} &= \mathbf{E} \left\{ -\Delta_{x_n}^{x_n} \log p(x_{n+1} | x_n) \right\} \\ D_n^{12} &= \mathbf{E} \left\{ -\Delta_{x_n}^{x_{n+1}} \log p(x_{n+1} | x_n) \right\} \\ D_n^{21} &= \mathbf{E} \left\{ -\Delta_{x_{n+1}}^{x_n} \log p(x_{n+1} | x_n) \right\} = (D_n^{12})^T \\ D_n^{22} &= \mathbf{E} \left\{ -\Delta_{x_{n+1}}^{x_{n+1}} \log p(x_{n+1} | x_n) \right\} + \mathbf{E} \left\{ -\Delta_{x_{n+1}}^{z_{n+1}} \log p(z_{n+1} | x_{n+1}) \right\} \end{aligned} \quad (2)$$

PCRB Gaussovské

Pro aditivní Gaussovský šum s nulovou střední hodnotou a invertovatelnými kovariančními maticemi Q_n a R_n platí následující vztahy pro výpočet matic D_n jako speciální případ (2):

$$\begin{aligned} D_n^{11} &= \mathbf{E} \left\{ [\nabla_{x_n} f_n^T(x_n)] Q_n^{-1} [\nabla_{x_n} f_n^T(x_n)]^T \right\} \\ D_n^{12} &= -\mathbf{E} \left\{ \nabla_{x_n} f_n^T(x_n) \right\} Q_n^{-1} \\ D_n^{22} &= Q_n^{-1} + \mathbf{E} \left\{ [\nabla_{x_{n+1}} h_{n+1}^T(x_{n+1})] R_{n+1}^{-1} [\nabla_{x_{n+1}} h_{n+1}^T(x_{n+1})]^T \right\} \end{aligned} \quad (3)$$

V případě linearitv funkcí f_n a h_n pak rekurzivní výpočet matice J_n (1) spolu s dosazením výše uvedených matic D_n (3) odpovídá výpočtu a posteriori kovarianční matice P_n Kalmanova filtru při označení $(P_n)^{-1} = J_n$. Uvažovaný systém (PMSM) je však nelineární, je tedy užíváno rozšířeného Kalmanova filtru (EKF), ve kterém se do napočtených matic derivací dosazují odhady stavu. Oproti tomu ve výše uvedených rovnicích (3) je počítána střední hodnota derivací (respektive jejich kvadrátů). Jak významný je rozdíl dvou takto různě provedených výpočtů bude předmětem testů v následujících experimentech. Správný výpočet střední hodnoty derivace bude označován jako \mathbf{E} a dosazení očekávané hodnoty do napočtené derivace pak jako \mathbf{nE} . Dále je třeba poznamenat, že správné výpočty střední hodnoty (\mathbf{E}) je třeba provést analyticky (symbolicky), což je i pro Gaussovská rozdělení velmi výpočetně náročná úloha a proto byla provedena za předpokladu nezávislosti a časové invariance, tedy kovarianční matice Q_n je diagonální a konstantní v čase, $Q_n = Q = \text{diag}([q_i]_{i=1}^{\dim(x)})$. Matice R_n je také použita konstantní a diagonální, ovšem těchto předpokladů není třeba, protože použité zobrazení h_n je lineární a nezávislé na čase a jeho derivací je konstantní matice.

Užité modely

Obecně byly použity čtyři typy modelů v souřadném systému $\alpha\beta$. Souřadný systém dq totiž nemá smysl používat, jelikož mez stále roste, což lze jednak usuzovat na základě tvaru rovnic, ale bylo ověřeno i experimentálně. Tyto modely se liší tím, jestli je uvažován *plný* nebo *redukovaný* stav systému. Dále pak jestli byl uvažován model motoru (PMSM) se stejnými (**Ls**) nebo různými (**Ldq**) indukčnostmi v osách d a q . Budou následovat matice derivací $A_n = [\nabla_{x_n} f_n^T(x_n)]^T$ zobrazení f_n a matice $C_{n+1} = [\nabla_{x_{n+1}} h_{n+1}^T(x_{n+1})]^T$ zobrazení h_{n+1} dle jednotlivých stavových veličin. Tyto matice však budou uvedeny pouze pro případ stejných indukčností.

$$A_{full}^{Ls} = \begin{bmatrix} a & 0 & b \sin \vartheta & b\omega \cos \vartheta \\ 0 & a & -b \cos \vartheta & b\omega \sin \vartheta \\ -e \sin \vartheta & e \cos \vartheta & d & -e(i_\alpha \cos \vartheta + i_\beta \sin \vartheta) \\ 0 & 0 & \Delta t & 1 \end{bmatrix}$$

$$C_{full}^{Ls} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{red}^{Ls} = \begin{bmatrix} d & -e(i_\alpha \cos \vartheta + i_\beta \sin \vartheta) \\ \Delta t & 1 \end{bmatrix}$$

$$C_{red}^{Ls} = \begin{bmatrix} b \sin \vartheta & b\omega \cos \vartheta \\ -b \cos \vartheta & b\omega \sin \vartheta \end{bmatrix}$$

Pro přehlednost je souhrn použitých modelů uveden v následující tabulce:

$\alpha - \beta$	L_s	L_{dq}
full	1	2
red	3	4

Dále pak budou jednotlivé modely označovány jejich číslem z tabulky.

Užitá řízení

Použitá řízení shrnuje následující seznam, dále budou označována svým číslem položky:

1. $\omega = \bar{\omega}$, $\vartheta = \int \omega$, $i_\alpha = i_\beta = 0$
2. PI
3. PI + injejtáž sin do $d - q$
4. PI + injejtáž obdélníků do $d - q$
5. PI + injejtáž konstanty do d
6. PI + náhodná chyba na $\bar{\omega}$
7. PI + injejtáž sin do $\alpha - \beta$
8. PI + injejtáž obdélníků do $\alpha - \beta$
9. PI + bikriteriální metoda se $\text{sign}\omega$
10. PI + bikriteriální metoda náhodný výběr 5 možností

Kovarianční matice

Testování proběhlo s následujícími kovariančními maticemi:

šumové

$$Q = \text{diag}([0.0013 \quad 0.0013 \quad 5.0e - 6 \quad 1.0e - 10])$$

$$R = \text{diag}([0.0006 \quad 0.0006])$$

ekf

$$Q = \text{diag}([0.1 \ 0.1 \ 0.1 \ 0.001])$$
$$R = \text{diag}([0.05 \ 0.05])$$

t1

$$Q = \text{diag}([0.1 \ 0.1 \ 0.1 \ 0.1])$$
$$R = \text{diag}([0.05 \ 0.05])$$

t2

$$Q = \text{diag}([0.1 \ 0.1 \ 0.1 \ 1.0])$$
$$R = \text{diag}([0.05 \ 0.05])$$

t3

$$Q = \text{diag}([0.1 \ 0.1 \ 0.1 \ 10.0])$$
$$R = \text{diag}([0.5 \ 0.5])$$

V případě redukováných modelů se první dva diagonální prvky Q nevyužijí.

Experimenty

Následující experimenty byly prováděny s ohledem na následující poznatky:

- variance na proudech se ve všech případech ukazovaly jako malé (stále kolem 0.0367) a dále již pak nebyly testovány
- redukované modely díky výpočtu střední hodnoty přes x_{n+1} vykazují lepší vlastnosti PCR meze, která již v nulových otáčkách neroste stále, ale zastavuje se na určité maximální hodnotě
- modely pro stejné (Ls) a různé (Ldq) indukčnosti dávají obvykle téměř shodné výsledky, injektáží periodického signálu (sinus, obdélníky) lze vylepšit (snížit) mez pro různé indukčnosti (Ldq), toto “zlepšení” pak závisí na frekvenci injektovaného signálu, obecně vyšší frekvence dává lepší výsledek
- nastavení kovariančních matic Q a R nemá vliv na tvar křivek znázorňujících PCR B, ovlivňuje však značně jejich hodnoty v absolutním měřítku
- hodnoty počáteční kovariance P_0 se projevují pouze na počátku a jejich vliv s rostoucím časem asymptoticky vymizí

- existuje vliv na volbě referenční hodnoty $\bar{\omega}$, tj. hodnoty kterou sledují skutečné otáčky ω ; tento vliv je zřejmý, ale je zde ještě další charakterový vliv, při uvažování $\bar{\omega} \equiv 0$ některá řízení fungují dobře, tj. omezují PCRB, jiná však ne a fungují pouze u, alespoň částečně, nenulových referenčních hodnot; toto lze předběžně interpretovat tak, že některá řízení fungují dobře pořád a některá, jen když se nejdříve něco “dozvědí”, tj. již mají nějakou informaci
- dále je třeba zkoumat především vliv jednotlivých řízení, a tedy i amplitud a případně frekvencí injektovaných signálů

Závislost PCRB ϑ na použité amplitudě přídavného budícího signálu pro PI řízení s konstantní injektáží do osy d

- Testované řízení: “5 – PI + injection (const. -> ud)”
- Použitý model: “alpha-beta Ls”
- Injektovaný signál:
 - amplituda: různá, konstantní – *předmět experimentu*
 - frekvence: $\omega_{inj} \equiv 0$, tj. neperiodický konstantní signál
- Kovarianční matice systému: typ *ekf*

$$Q = \text{diag} [0.1 \quad 0.1 \quad 0.1 \quad 0.001]$$

$$R = \text{diag} [0.05 \quad 0.05]$$

- Časový horizont: standartní 120000 vzorků, tj. 15s
- Referenční signál: nulový $\bar{\omega} = 0$
- Počáteční kovariance: dva testované případy 100Eye a 1Eye

Výsledné hodnoty PCRB polohy ϑ v závislosti na amplitudě injektáže¹ zachycují grafy (Figure 1 a 2).

Porovnání PCRB ϑ pro jednotlivá řízení dle užitého referenčního signálu

- Testovaná řízení: 1 – 10
- Použitý model: “alpha-beta Ls”
- Injektovaný signál:
 - amplituda: $amp = 10.0$

¹pro případ bez injektáže, tj. $amp \equiv 0$, variance stále lineárně roste

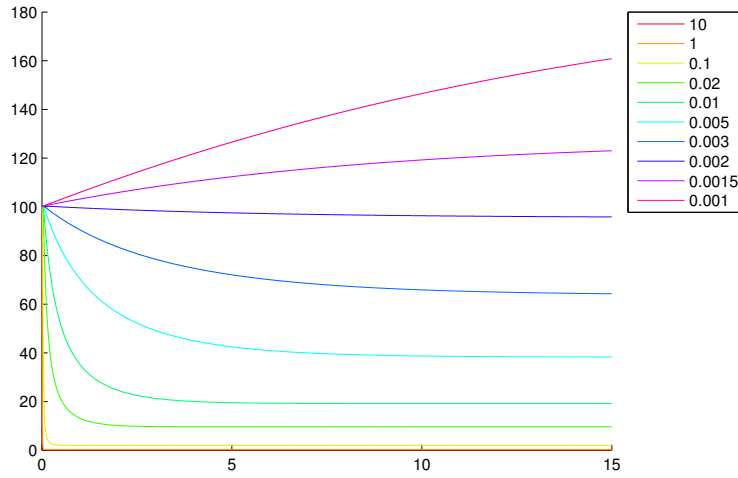


Figure 1: Hodnoty PCR_B polohy ϑ v závislosti na amplitudě injektovaného konstantního signálu (viz legenda) pro počáteční kovarianci 100Eye

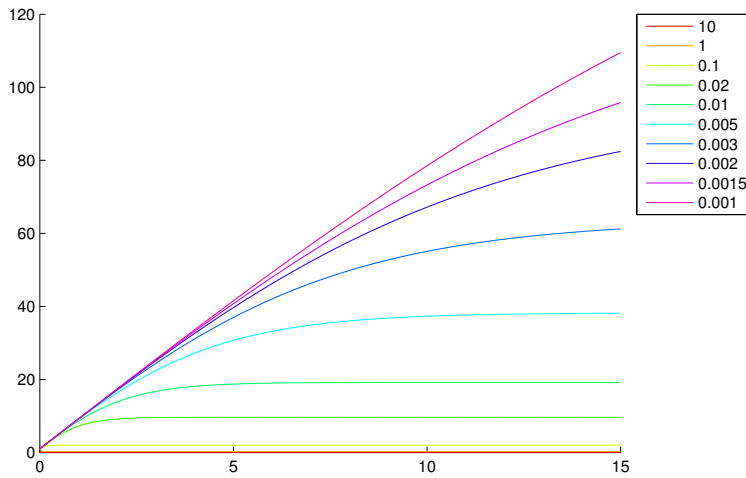


Figure 2: Hodnoty PCR_B polohy ϑ v závislosti na amplitudě injektovaného konstantního signálu (viz legenda) pro počáteční kovarianci 1Eye

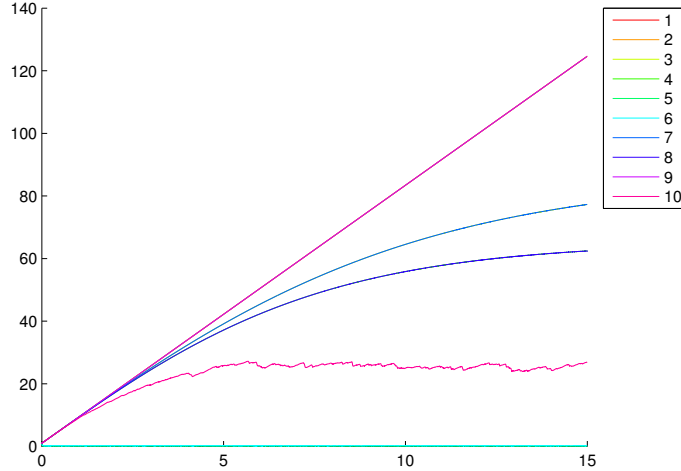


Figure 3: Porovnání hodnot PCR ϑ pro jednotlivá užitá řízení při referenčním signálu $\bar{\omega} \equiv 0$. Přitom křivky pro 1,2 a 9 splývají pod barvou 9; dále 3 splývá se 7 pod barvou 7 a 4 splývá s 8 pod barvou 8; křivka pro 5 pak splývá s 6 pod barvou 6.

– frekvence: $\omega_{inj} = 5000$, (*pozor* – vysoká hodnota)

- Kovarianční matice systému: typ *ekf*

$$Q = \text{diag} [0.1 \quad 0.1 \quad 0.1 \quad 0.001]$$

$$R = \text{diag} [0.05 \quad 0.05]$$

- Časový horizont: standartní 120000 vzorků, tj. 15s

- Referenční signál:

– nulový $\bar{\omega} \equiv 0$

– profil $\bar{\omega}_{profile} = [0 \quad -1 \quad 3 \quad 6 \quad 9 \quad 6 \quad 3 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -3 \quad -6 \quad -3]$

- Počáteční kovariance: 1Eye

Výsledné hodnoty PCR polohy ϑ v závislosti na užitém referenčním signálu zachycují grafy (Figure 3 a 4).

Na dvou předchozích grafech (Figure 3 a 4) již může být pozorován jev zmiňovaný v úvodních poznámkách k experimentům, tj. o vlivu referenční hodnoty. Konkrétně se jedná o řízení č. 9. Pro názornost bude uvažovaný jev ještě zobrazen na grafech (Figure 5) srovnávající řízení č. 2 (PI) a č. 9 (PI + bikriteriální signál). Tento jev lze vysvětlit tak, že řízení č. 9 (PI + bikriteriální

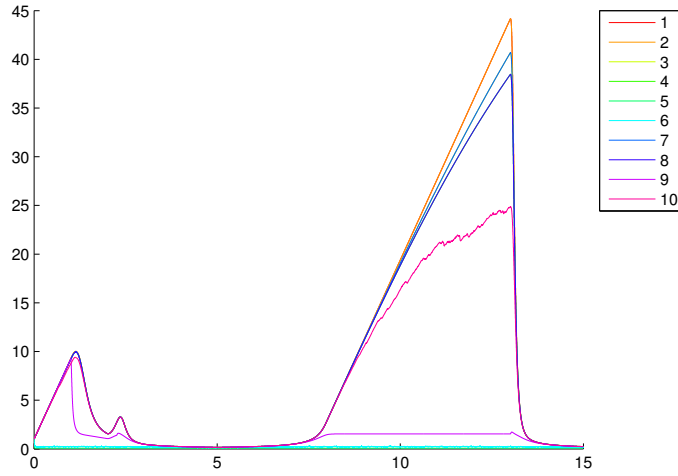


Figure 4: Porovnání hodnot PCR B ϑ pro jednotlivá užitá řízení při referenčním signálu $\bar{\omega}_{profile}$. Přitom křivky pro 1 a 2 splývají pod barvou 2; dále 3 splývá se 7 pod barvou 7 a 4 splývá s 8 pod barvou 8; křivka pro 5 pak splývá s 6 pod barvou 6.

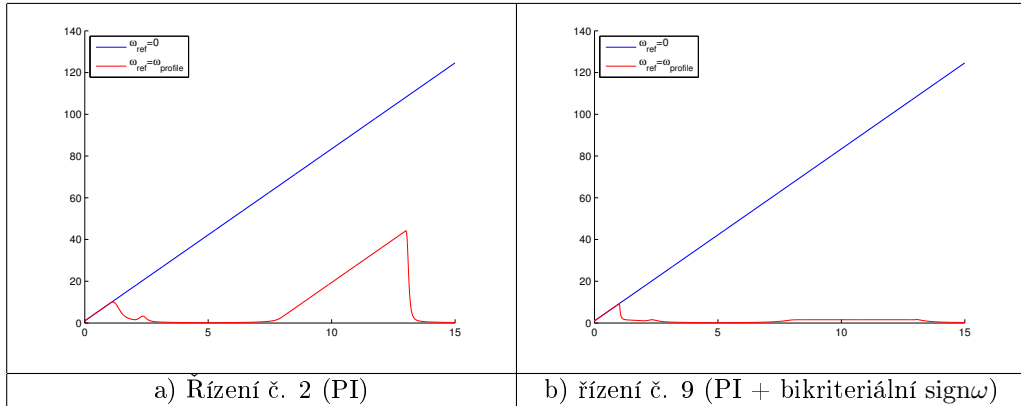


Figure 5: Srovnání PCR B ϑ pro řízení č. 2 a č. 9 při referenčních signálech $\bar{\omega} \equiv 0$ a $\bar{\omega}_{profile}$

sign ω) při nulovém referenčním signálu, a tedy stále nepozorovatelnému stavu ϑ , nezvládne nijak pozitivně ovlivnit PCR B ϑ . V případě, že ale stav ϑ nějaký čas pozoruje, a tedy o něm dostane nějakou informaci, zvládne pak pozitivně ovlivnit, tj. snížit, PCR B ϑ . Na grafu (Figure 5b) lze i pozorovat jakousi mez, kdy je “získána” schopnost omezovat PCR B a v tu chvíli hodnota rychle klesá a dále již nepřerůstá jistou mez.

Porovnání PCR B ϑ pro jednotlivá řízení a užitá modely

- Testovaná řízení: 1 – 10
- Použitý model: plný i redukovaný alpha-beta se stejnými (Ls) i různými (Ldq) indukčnostmi
- Injektovaný signál:
 - amplituda: $amp = 10.0$
 - frekvence: $\omega_{inj} = 1000$
- Kovarianční matice systému: typ *ekf*

$$Q = \text{diag} [0.1 \quad 0.1 \quad 0.1 \quad 0.001]$$

$$R = \text{diag} [0.05 \quad 0.05]$$

- Časový horizont: standartní 120000 vzorků, tj. 15s
- Referenční signál:
 - nulový $\bar{\omega} \equiv 0$
 - profil $\bar{\omega}_{profile} = [0 \quad -1 \quad 3 \quad 6 \quad 9 \quad 6 \quad 3 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -3 \quad -6 \quad -3]$
- Počáteční kovariance: 1Eye

Výsledné hodnoty PCR B polohy ϑ v závislosti na užitém referenčním signálu a použitém řízení zachycují grafy (Figure 6 a 7). Některé výsledky jsou prakticky totožné, proto z podobných řízení bude zobrazen pouze vybraný zástupce.

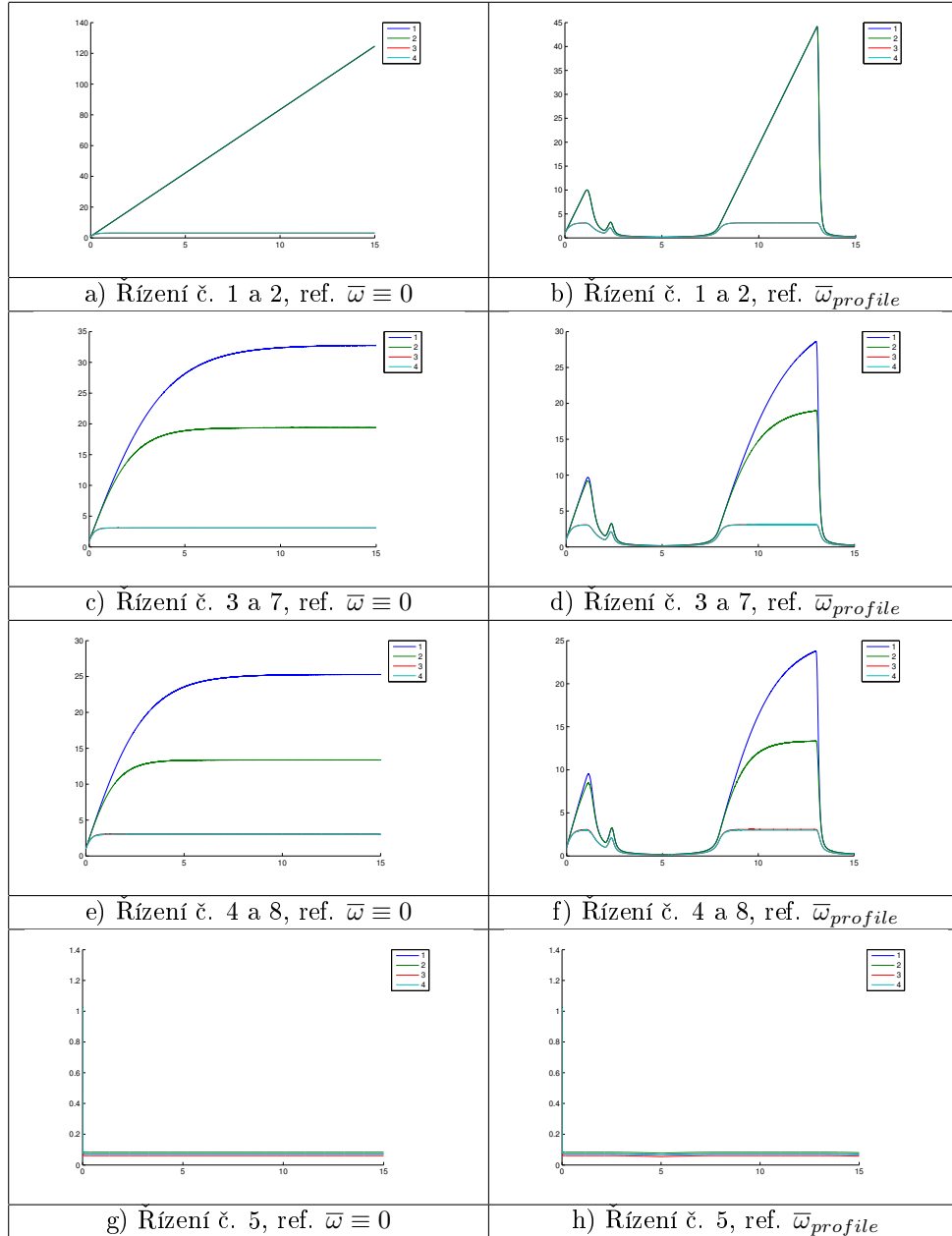


Figure 6: Hodnoty PCR ϑ dle volby řízení, referenčního signálu a použitého modelu. Ve všech zde uvedených grafech (a-h) splývají křivky pro modely 3 a 4, v případech a) a b) splývají i 1 a 2, a pro g) a h) pak splývá téměř vše (1-4).

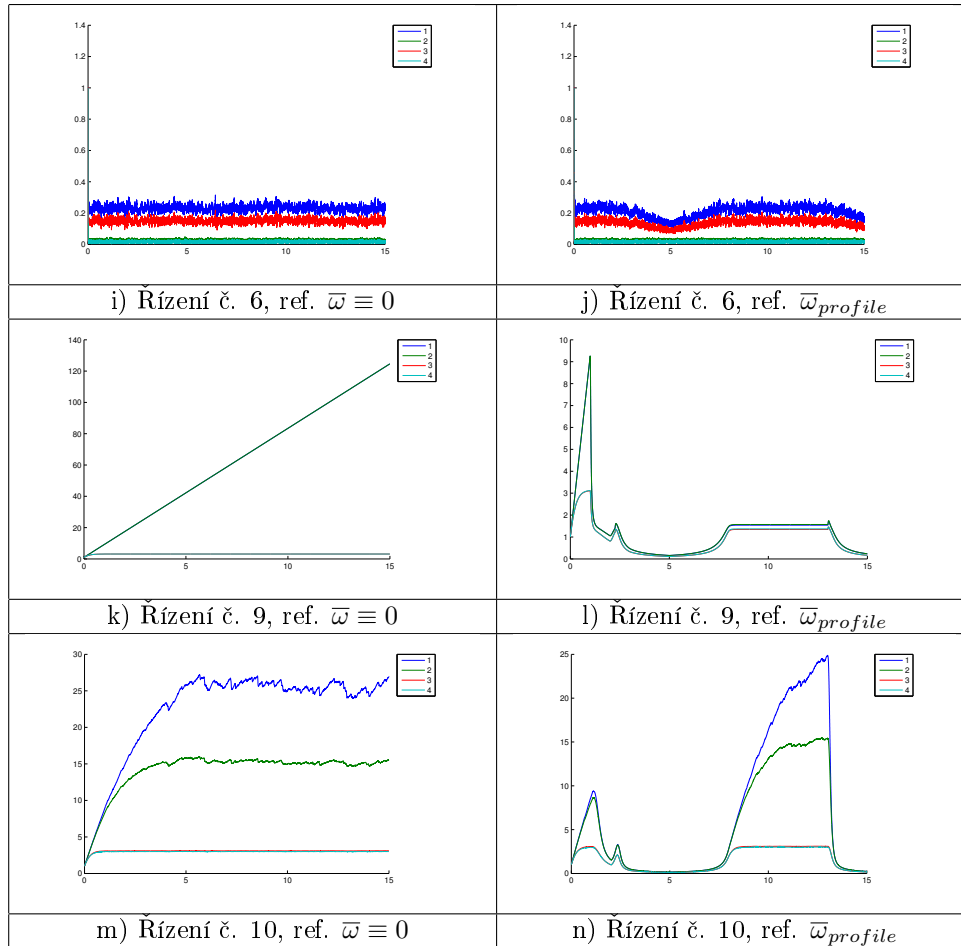


Figure 7: Hodnoty PCR \mathcal{B} ϑ dle volby řízení, referenčního signálu a použitého modelu. V grafech k) až n) splývají křivky pro modely 3 a 4, pro k) a l) pak splývá dále 1 a 2, v i) a j) pak téměř splývají 2 a 4.