Obsah

Úvod

V technické praxi, stejně jako běžném životě, jsme nuceni dělat rozhodnutí. Ať už se jedná o řízení výrobní linky či hledání optiálního spojení mezi dvěma místy, naše rozhodnutí vycházejí ze znalostí, které o světě máme. Chceme-li činit úspěšná rozhodnutí, je třeba vyřešit dvě úlohy: 1) řízený objekt co nejlépe poznat a 2) dosánout cíle, který jsme si vytyčili. Tyto dva úkoly jsou však většinou v rozporu: systém se nejlépe pozná, když se nechová podle našich požadavků. V reálném světě navíc existují náhodné jevy, poruchy a nepředpovídané situace, které jednotně nazýváme neurčitostí. Tato skutečnost způsobuje, že naše znalost systému nebude nikdy dokonalá.

Za účelem řízení systémů, které jsou buď natolik složité, že jejich deterministický popis je nemožný, nebo obsahujících náhodné prvky již ze své podstaty, vzniklo stochastické řízení, nebo-li optimální řízení za neurčitosti. Cílem stochastického řízení je minimalizovat velikost odchylek systému od požadovaného stavu optimalizací řídících zásahů.

Jeden z přístupů k řešení tohoto probému je dynamické programování, které navrhl americký matematik Richard Bellman[]. Jedná se o metodu, která s využitím zpětného chodu minimalizuje hodnotu očekávané ztátové funkce. Tento přístup má analytické řešení pouze v případě znalosti všech parametrů systému. V šedesátých letech 20. století navrhl Alexander Aronovich Feldbaum řešení použitím takzvaného duálního řízení. Hlavní myšlenkou tohoto přístupu bylo, že řízení musí nejen minimalizovat aktuální ztrátu, ale rovněž musí získat o systému co nejvíce informací pro minimalizaci budoucích ztrát.

Přímá aplikace tohoto postupu je však bohužel i u poměrně jednoduchých značně komplikována složitostí výpočtu. K řešení úlohy je proto vhodné požít aproximačních metod.

Tato bakalářská práce si klade následující cíle

- Formulace úlohy stochastického řízení
- Řešení úlohy stochastického řízení pomocí duálního řízení
- Představení některých aproximačních přístupů k duálnímu řízení, zejména pak stochastického iterativního dynamického programování

- Aplixace duálního řízení k nalezení optimální strategie na jednoduchém systému
- Porovnání uvedených aproximačních přístupů na jednoduchém systému

Kapitola 1

Úloha stochastického řízení

1.1 Formulace úlohy stochastického řízení

Ústředním pojmem v teorii řízení je *systém*. Systém je část světa, kterou chceme poznat či řídit. Informace o stavu sytému získáváme prostřednictvím jeho výstupů. Řízení, tj. ovlivňování stavu systému, můžeme provádět vstupů. V této práci budeme předpokládat, že výstupy charakterizují stav systému úplně. To nemusí být obecně pravda, postup při řízení s nedokonalými informacemi o stavu systému je uveden například v []. Obecně se dá ukázat, že úloha s řízení systému s neúplnými informacemi o stavu se dá ekvivalentně transformovat na úlohu řízení systému s úplnými informacemi o stavu.

Budeme-li předpokládat diskrétní povahu času můžeme systém v časovéme okamžiku t popsat systémem rovnic

$$x_{t+1} = f_k(x_t, u_t, w_t), \qquad t = 0, 1, \ldots, N-1, \tag{1.1}$$

kde x_t je výstup v čase t, u_t je vstup v čase t a w_t je náhodná veličina.

Dále máme předepsánou ztrátovou funkci

$$g(x_0, \ldots, x_N, u_0, \ldots, u_{N-1}, w_0, \ldots, w_{N-1}) \tag{1.2}$$

Posloupností řídících strategií $\pi = \{\mu_0, \ldots, \mu_{N-1}\}$ budeme rozumět posloupnost zobrazení

$$\mu_t(x_t) = u_t \qquad t = 0, 1, \ldots, N-1, \tag{1.3}$$

Pro danou řídící strategii označme očekávanou ztrátu jako

$$J_\pi(x_0) = \mathop{\mathrm{E}}_{w_0,\ldots,w_{N-1}} \{g(x_0 \ldots, x_N, \mu_0(x_0), \ldots, \mu_{N-1}(x_{N-1}), w_0, \ldots, w_{N-1})\} \tag{1.4}$$

Úlohou je potom najít takovou π^*, pro kterou platí

$$J_{\pi^*}(x_0) = \min_{\pi \in \Pi} J_\pi(x_0) \tag{1.5}$$

Celkově se tedy jedná o optimalizační úlohu nalézt takovou posloupnost funkcí (1.3), která minimalizuje očekávanou ztrátovu (1.4) za podmínek (1.1).

1.2 Použití dynamického programování při řešení úlohy stochastického řízení s aditivní ztrátou

Úlohu stochastického řízení tak, jak byla definována v předchozí části, nelze obecně řešit. Je tedy potřeba úlohu nějak blíže specifikovat. V tomto směru je možné omezit se na nějaký speciální tvar ztrátové funkce (1.4). Jako vhodné řešení se ukazuje uvažovat tzv. aditivní tvar ztrátové funkce, tedy že existují funkce g_t takové, že můžeme psát

$$g(x_0, \ldots, x_N, u_0, \ldots, u_{N-1}, w_0, \ldots, w_{N-1}) = g_N(x_N) + \sum_{t=0}^{N-1} g_t(x_t, u_t, w_t) \tag{1.6}$$

Očekávanou ztrátu (1.4) tedy můžeme přepsat do tvaru

$$J_\pi(x_0) = \mathop{\mathrm{E}}_{w_0, \ldots, w_{N-1}} \left\{ g_N(x_N) + \sum_{t=0}^{N} (g_t(x_t, \mu_t(x_t), w_t)) \right\} \tag{1.7}$$

Takto specifikovaná úloha se dá řešit použitím dynamického programování []. Dynamické programování je přístup k řešení optimalizačních úloh, na které se můžeme dívat jako na posloupnost rozhodnutí, pro které platí tzv. princip optimality. Ten říká, že optimální posloupnost rozhodnutí má tu vlastnost, že pro libovolný počáteční stav a rozhudnutí musí být všechna následující rozhodnutí optimální vzhledem k výsledkům rozhodnutí prvního. Důkaz, že pro ztrátu tvaru (1.6) platí princip optimality je snadný a lze ho nalézt například v [].

Při řešení úlohy stochastického řízení s aditivní ztrátou je tedy možné postupovat, jak je u úloh řešených pomocí dynamického programování zvykem. Minimální hodnotu střední ztráty od okamžiku t do N v závislosti na x_t označíme $J_t(x_t)$ a můžeme pro ni psát

$$J_N(x_N) = g_N(x_N) \tag{1.8}$$

$$J_t(x_t) = \min_{u_t \in U(x_t)} \mathop{\mathrm{E}}_{w_t} \{ g_k(x_t, u_t, w_t) + J_{t+1}(f_t(x_t, u_t, w_t)) \} \qquad t = 0, \ldots, N-1 \tag{1.9}$$

Pří řešení budeme postupovat od konce řídícího horizontu a postupně hledat $J_t(x_t)$. Potom libovolná $\pi = \{\mu_0, \ldots, \mu_{N-1}\}$, která splňuje systém rovnic

$$J_t(x_t) = \mathop{\mathrm{E}}_{w_t} \{ g_k(x_t, \mu_t(x_t), w_t) + J_{t+1}(f_t(x_t, \mu_t(x_t), w_t)) \} \qquad t = 0, \ldots, N-1 \tag{1.10}$$

je optimální posloupnost rozhodnutí. Na systém rovnic (1.10) se tedy můžeme dívat jako na implicitní předpis pro π.

Kapitola 2

Suboptimální přístupy k úloze stochastického řízení

2.1 Nutnost přejít k suboptimálním metodám

Ačkoliv dynamického programování přináší významný pokrok v řešení úlohy stochastického řízení, analytické řešení obvykle není možné získat. V každém časovém kroku se totiž potýkáme se dvěma obecně obtížnými problémemy: 1) výpočet střední hodnoty vzhledem k w_k a 2) následná minimalizace vzhledem k u_k. Oba problémy obecně nemají analytické řešení a bez další specifikace úlohy je proto třeba přejít k aproximačním metodám.

2.2 Duální řízení

Častou situací v úloze stochastického řízení je, že systém popsaný systémem rovnic (1.1) obvykle závisí na nějakém parametru θ, o kterém máme k dispozici pouze nějakou apriorní informaci. K úspěšnému řízení je tedy vhodné nejen inimalizovat aktuální ztrátu, ale rovněž získat o systému co nejvíce informací pro minimalizaci budoucích ztrát. Tento postup se nazývá duální řízení [ref].

2.2.1 Bayesovské učení

Přímočarý postup jak pro parametr θ získat aposteriorní hustotu pravděpodobnosti $f(\theta|X)$, je-li k dispozici apriorní hustota pravděpodobnosti $f(\theta)$ a soubor měření X, je aplikace Bayesova vzorce

$$f(\theta|X) = \frac{f(X|\theta)f(\theta)}{\int f(X|\theta)f(\theta)\mathrm{d}\theta} \tag{2.1}$$

Rekurzivní použití vzorce (2.1) pro odhad parametru θ je postup Bayesovského učení [ref].

Při konkrétním vypočtu má však tento přístup dvě nevýhody: 1) nikdy nemáme k dispozici $f(X|\theta)$, ale pouze její aproximaci z měření X a 2) aposteriorní hustota pravděpodobnosti nemusí mít analytické vyjádření, což její použití v dalším výpočtu komplikuje.

2.2.2 Kalmanův filtr

Pokud je předmětem řízení systém s gausovkým šumem, ve kterém neznámé parametry vystupují jako lineání členy situace se značně zjednoduší [ref]. Systém (1.1) má v čase t tedy tvar

$$x_{t+1} = f_k(x_t, u_t) + A_t(x_t, u_t)\theta_t + w_t \tag{2.2}$$

, kde $A_t(x_t, u_t)$ je známá matice závisící na předchozím stavu systému a vstupu. Dále předpokládejme gausovské rozložení šumu w_t se známým rozptylem, gausovské rozložení neznáměho parametru θ a jejich nekorelovanost, tedy

$$\theta_t \sim N(\hat{\theta}, P_t), \tag{2.3}$$

$$w_t \sim N(0, Q_t), \tag{2.4}$$

$$\mathrm{Cov}(w_t, \theta_t) = 0. \tag{2.5}$$

Na základě odezvy systému x_{t+1} a θ_t chceme získat nějaký nový odhad parametru θ_{t+1}. Budeme předpokládat, že θ_{t+1} získáme lineární opravou θ_t úměrnou neurčitosti v systému. Tedy že

$$\hat{\theta}_{t+1} = \hat{\theta}_t + K_t(x_{t+1} - f_t(x_t, u_t) - A_t\hat{\theta}_t) \tag{2.6}$$

, kde K_t je neznámá matice, kterou určíme z požadavku minimalizace výsledné matice rozptylu P_{t+1}. Pro ni jako funkci K_t můžeme psát

$$P_{t+1}(K_t) = \mathrm{E}[(\theta - \hat{\theta}_{t+1})(\theta - \hat{\theta}_{t+1})^T]. \tag{2.7}$$

Dosazením za $\hat{\theta}_{t+1}$ ze (2.6) a za x_t ze (2.2) a úpravou dostaneme (pro libovolnou matici B budeme pro lepší čitelnost namísto BB^T psát zkráceně B^2)

$$\begin{aligned} P_{t+1}(K_t) &= \mathrm{E}[(\theta - \theta_t - K_t(x_{t+1} - f_t(x_t, u_t) - A_t\hat{\theta}_t))^2] \\ &= \mathrm{E}[((I - K_tA_t)(\theta - \theta_t) - K_tw_t)^2] \\ &= (I - K_tA_t)\,\mathrm{E}[(\theta - \theta_t)^2](I - K_tA_t)^T - (I - K_tA_t)\,\mathrm{Cov}(\theta, w_t)K_t^T - \\ &- K_t\,\mathrm{Cov}(\theta, w_t)(I - K_tA_t)^T + K_t\,\mathrm{E}[w_t^2]K_t^T. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Použitím definice P_t, Q_t a předpokladu $\mathrm{Cov}(\theta, w_t) = 0$ máme

$$P_{t+1}(K_t) = (I - K_tA_t)P_t(I - K_tA_t)^T + K_tQ_tK_t^T. \tag{2.9}$$

Protože požadujeme minimální rozptyl odhadu $\hat{\theta}_{t+1}$, určíme K_t z rovnice

$$\frac{\partial\,\mathrm{tr}(P_t)}{\partial K_t}. \tag{2.10}$$

K provedením derivace použijeme vzorce*ODVOZENI BUDE ASI AZ V DODATKU*

$$\frac{\partial \operatorname{tr}(MXN)}{\partial X} = M^T N^T \tag{2.11}$$

$$\frac{\partial \operatorname{tr}(MXNX^TO)}{\partial X} = M^T O^T XN + OMXN. \tag{2.12}$$

Tím získáme lineární rovnici pro K_t tvaru

$$-P_t^T A_t - P_t A_t + K_t A_t P_t K_t + K_t A_t^T P_t K_t + 2QK_t = 0, \tag{2.13}$$

která má řešení

$$K_t = \frac{P_t A_t}{A_t^T P_t A_t + Q} \tag{2.14}$$

Dosazením (2.14) do (2.9) po upravě dostaneme

$$P_{t+1} = (I - K_t A_t)P_t \tag{2.15}$$

Celkově tedy od původního odhadu parametru $N(\hat{\theta}_t, P_t)$ k novému $N(\hat{\theta}_{t+1}, P_{t+1})$ přejdeme pomocí

$$K_t = \frac{P_t A_t}{A_t^T P_t A_t + Q} \tag{2.16}$$

$$\hat{\theta}_{t+1} = \hat{\theta}_t + K_t(x_{t+1} - f_t(x_t, u_t) - A_t\hat{\theta}_t) \tag{2.17}$$

$$P_{t+1} = (I - K_t A_t)P_t \tag{2.18}$$

2.3 Přístupy k duálnímu řízení

nektere mozne pristupy, jak odhaduji suboptimalni u_t

2.3.1 Certainty equivalecnce control

2.3.2 Metoda separace

2.3.3 SIDP

Kapitola 3

Srovnání suboptimální přístupů při řízení jednoduchého systému

3.1 Popis systému

3.2 Transformace systému

3.3 Srovnání jednotlivých přístupů

Závěr

Sem prijde zaver

tady budou reference